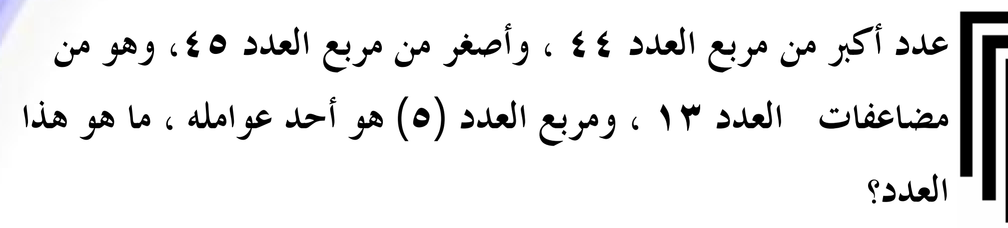
المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
الإدارة العامة للتربية والتعليم بمنطقة نجران (بنين)
مركز الإشراف التربوي بمحافظة شرورة
شعبة الرياضيات

نادي معلمي الرياضيات الورقي

الكتاب السنوي الثالث

١٤٢٧ - ١٤٢٨ هـ





١

عدد أكبر من مربع العدد ٤٤ ، وأصغر من مربع العدد ٤٥، وهو من مضاعفات العدد ١٣ ، ومربع العدد (٥) هو أحد عوامله ، ما هو هذا العدد؟

[المصدر : اختبار التصفية الأولى لمسابقة المعلمين – البحرين ٢٠٠٥/١/١٢م]



نفرض أن العدد = س

∴ (٤٤)^{٢} < س < (٤٥)^{٢}

∴ ١٩٣٦ < س < ٢٠٢٥

ولكن ١٣، ٢٥ من عوامل س

∴ ١٣× ٢٥ = ٣٢٥ من عوامل س أيضاً (المضاعف المشترك)

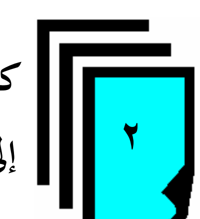
نبحث عن عدد من مضاعفات العدد ٣٢٥ بين ١٩٣٦ ، ٢٠٢٥

بالتجريب نجد أن : ٣٢٥×٦ = ١٩٥٠

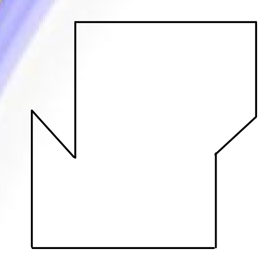
∴ س = ١٩٥٠

لأن ١٩٣٦ < ١٩٥٠< ٢٠٢٥



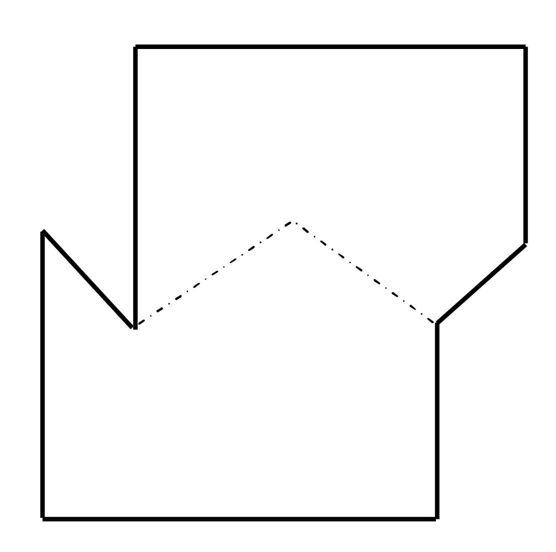


كيف يمكنك أن تقسم الشكل التالي
إلى قسمين متشابهين ومتساويين؟



[المصدر : اختبار التصفية الأولى لمسابقة اولمبياد الرياضيات السادسة للمدارس الابتدائية – البحرين ٢٢/١٢/٢٠٠٤م]









إذا كان كل من ك ، م عددان أوليان ، كان ك م = ٢٠٤٧ ، (ك - ١)(م - ١) = ١٩٣٦ فأوجد كل من ك ، م

[المصدر : المسابقة الرابعة - المركز الوطني للعلوم الرياضية – المملكة العربية السعودية]



∵ (ك - ١)(م - ١) = ١٩٣٦

∴ ك م – ك – م +١= ١٩٣٦

∵ ك م = ٢٠٤٧ ------------------------- (١)

∴ ٢٠٤٧ – ك – م +١= ١٩٣٦

∴ – ك – م = ١٩٣٦ – ٢٠٤٧ – ١

∴ – ك – م = ١٩٣٦ – ٢٠٤٧ - ١

∴ – ك – م = -١١٢

∴ ك + م = ١١٢

∴ ك = ١١٢ - م ------------------------- (٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

∴ م (١١٢ – م) = ٢٠٤٧

∴ ١١٢م – م^{٢} = ٢٠٤٧

∴ م^{٢}+ ١١٢م - ٢٠٤٧= صفر

∴ (م -٢٣) (م _ ٨٩) = صفر

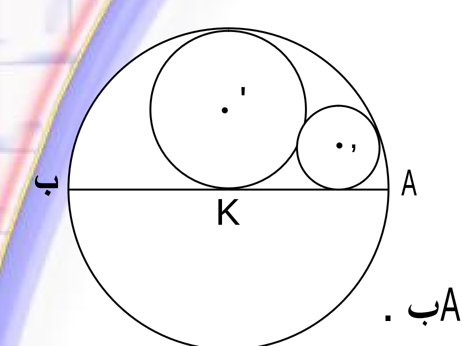
∴ م = ٢٣ أو ٨٩ ، ومنها ك = ٨٩ أو ٢٣ وهما عددان أوليان.

٤

على الشكل :

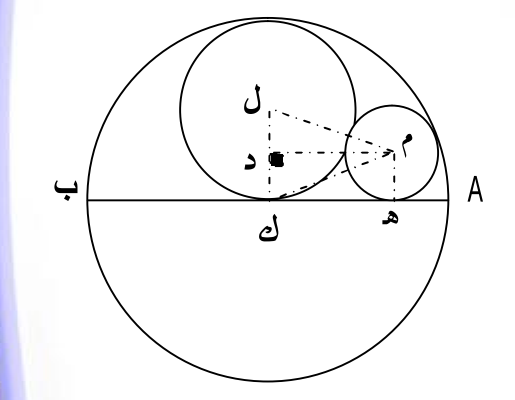
Aب قطر في الدائرة K ، والدائرة ' تمس الدائرة K ، وتمس Aب في مركز الدائرة K ، والدائرة , تمس الدائرة K والدائرة ' والمستقيم Aب .

أحسب النسبة بين مساحة الدائرة K ومساحة الدائرة ,



[المصدر : الاولمبياد الأمريكية الوطنية رقم ٢٧ – مارس ١٩٧٦م]







- نفرض أن الدائرة م تمس م ب في النقطة هـ.
- نصل م هـ ، ل ك ، م ل ، م ك.
- نرسم م د ⊥ ل ك .
- نفرض أن طول نصف قطر الدائرة م = س
- نفرض أن طول نصف قطر الدائرة ل = ص

∴ طول نصف قطر الدائرة ك = ٢ ص

∵ الدائرتان م ، ل متماستان من الخارج ∴ م ل = س + ص

∵ الدائرتان م ، ك متماستان من الداخل ∴ م ك = ٢ ص - س

∵ د ك = م هـ = س ∴ ل د = ص - س

في △ م ك ل ∵ م د ⊥ ل ك .

∴ | م د |^{٢}= | م ل |^{٢} - |ل د |^{٢} = | م ك |^{٢} - | ك د |^{٢}

∴| م ل |^{٢} - | م ك |^{٢}=|ل د |^{٢} - | ك د |^{٢}

∴ (س + ص)^{٢} – (٢ ص - س)^{٢} = (ص - س)^{٢}- س^{٢}

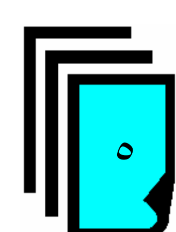
∴ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} - ٤ ص^{٢}+ ٤ س ص - س^{٢} = ص^{٢} – ٢س ص +س^{٢} - س^{٢}

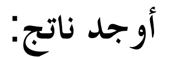
∴ ٢ س ص - ٤ ص^{٢}+ ٤ س ص =– ٢س ص

∴ ٨ س ص = ٤ ص^{٢} ∴ س = $\frac{١}{٢}$ ص

النسبة بين مساحتي الدائرتين ك، م = ط (٢ ص)^{٢} : ط ($\frac{١}{٢}$ ص)^{٢} = ١٦ : ١







$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2000} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2000}$$

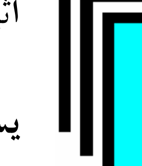
[المصدر : الاولمبياد المصرية الوطنية –٢٠٠٣م]



$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2000} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2000} = \left(\frac{(\sqrt{5}+1)\times(\sqrt{5}-1)}{4}\right)^{2000}$$

$$= \left(\frac{5-1}{4}\right)^{2000}$$

$$= \left(\frac{4}{4}\right)^{2000} = 1$$





أثبت أن الحد **الأوسط في مفكوك :** $(\text{١} + \text{س})^{\text{٢ن}}$

يساوي $\dfrac{\text{١} \times \text{٣} \times \text{٥} \times \ldots\ldots \times (\text{٢ن} - \text{١})}{\text{ن}!} \times \text{٢}^{\text{ن}}\ \text{س}^{\text{ن}}$

[المصدر : اختبار الثانوية العامة – المملكة الأردنية –١٩٦٥م]



رتبة الحد الأوسط = $\dfrac{\text{٢ن} - \text{٢}}{\text{٢}} = \text{ن} - \text{١}$

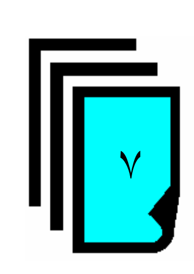
$\therefore \text{ح}_{\text{ن}+\text{١}} = \text{ق}^{\text{٢ن}}_{\text{ن}}\ \text{س}^{\text{ن}} = \dfrac{\text{٢ن}!}{\text{ن}!\ \text{ن}!}\ \text{س}^{\text{ن}}$

$= \dfrac{\text{٢ن}(\text{٢ن} - \text{١})(\text{٢ن} - \text{٢}) \ldots\ldots \times \text{٤} \times \text{٣} \times \text{٢} \times \text{١} \times \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!\ \text{ن}!}$

$= \dfrac{(\text{٢ن} - \text{١}) \ldots\ldots \times \text{٣} \times \text{١}}{\text{ن}!} \times \dfrac{\text{ن}\ (\text{ن} - \text{١}) \ldots\ldots \times \text{٢} \times \text{١}}{\text{ن}!} \times \text{٢}^{\text{ن}} \times \text{س}^{\text{ن}}$

$= \dfrac{\text{١} \times \text{٣} \times \text{٥} \times \ldots\ldots \times (\text{٢ن} - \text{١})}{\text{ن}!} \times \text{٢}^{\text{ن}}\ \text{س}^{\text{ن}}$





أوجد مجموعة حل المعادلة : س^{٤} + (٢ - س)^{٤}= ٣٤ في ح

[المصدر : مسابقة معهد هارفارد الأمريكي – ٢٨ فبراير ٢٠٠٤م]



نفرض أن : ص = ٢ - س ومنها س + ص = ٢

بالتعويض في المعادلة : س^{٤} + (٢ - س)^{٤}= ٣٤

∴ س^{٤} + ص^{٤} = ٣٤

∵ (س + ص)^{٤} = س^{٤} + ٤ س^{٣} ص + ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}

= س^{٤} + ص^{٤} +٢ س ص (٢س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٣ س ص) - - - - - - - - (١)

∵ س + ص = ٢ ، س^{٤} + ص^{٤} = ٣٤

∴ بالتعويض في (١) ٢^{٤}= ٣٤ + ٢ س ص (٢س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٣ س ص)

٢^{٤}= ٣٤ + ٢ س ص [٢(س^{٢}+ ص^{٢}) + ٣ س ص]

٢^{٤}= ٣٤ + ٢ س ص [٢(س^{٢}+ ص^{٢} + ٢ س ص – ٢ س ص) + ٣ س ص]

٢^{٤}= ٣٤ + ٢ س ص [٢(س^{٢}+ ص^{٢} + ٢ س ص) – ٤ س ص + ٣ س ص]

٢^{٤}= ٣٤ + ٢ س ص [٢(س+ ص)^{٢} - س ص]

٢^{٤}= ٣٤ + ٢ س ص [٢(٢)^{٢} - س ص]

٢^{٤}= ٣٤ + ٢ س ص [٨ - س ص]

١٦= ٣٤ + ١٦ س ص - ٢ س^{٢} ص^{٢}

∴ ٢ س^{٢} ص^{٢} - ١٦س ص – ١٨ = صفر (بالقسمة على ٢)

∴ (س ص)^{٢} - ٨ س ص – ٩= صفر

∴ [{ س ص } - ٩][{ س ص } + ١]= صفر

∴ س ص = ٩ أو س ص = - ١

بحل المعادلتين : س ص = ٩ ، س + ص = ٢ كالتالي:-

بضرب : س + ص = ٢ × ص

∴ س ص + ص^{٢} = ٢ ص



∴ ٩ + ص^{٢} = ٢ ص

∴ ص^{٢} - ٢ ص +٩ = صفر

(مميز المعادلة السابقة : ب^{٢} – ٤ ﻫ ج = ٤ – ٤ × ١ × ٩ = - ٣٢ < صفر)

∴ المعادلة : ص^{٢} - ٢ ص +٩ = صفر ليس لها حلول حقيقية.

بحل المعادلتين : س ص = - ١ ، س + ص = ٢ كالتالي:-

بضرب : س + ص = ٢ × ص

∴ س ص + ص^{٢} = ٢ ص

∴ -١ + ص^{٢} = ٢ ص

∴ ص^{٢} - ٢ ص - ١= صفر

(مميز المعادلة السابقة : ب^{٢} – ٤ ﻫ ج = ٤ – ٤ × ١ × - ١= ٨ > صفر)

وباستخدام القانون العام لحل المعادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

∴ ص = (٢ ± √٨) / ٢ = (٢ ± ٢√٢) / ٢ = ١ ± √٢

بالتعويض عن قيم ص في المعادلة : س + ص = ٢

∴ س = ٢ –(١ ± √٢)

∴ س = ١ ∓ √٢

∴ مجموعة الحل = { ١ ± √٢ }



٨

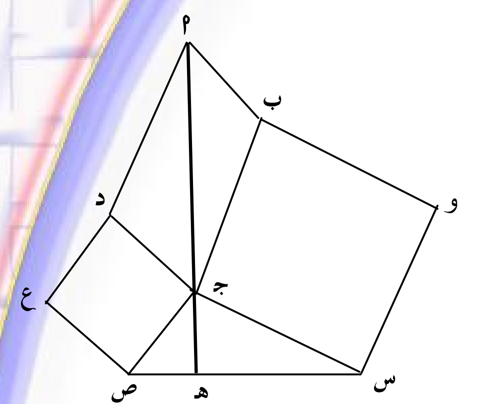
على الشكل :

ﻫ ب ج د متوازي أضلاع ، أنشأ على ضلعيه ب ج ، ج د المربعان ب ج س و ، د ج ص ع.

رسم ﻫ ج فقطع س ص في هـ.

أثبت أن :

| ﻫ ج | = | س ص | ، ﻫ ج ⊥ س ص



[المصدر : مسابقة ولاية وسكنسون الأمريكية– يناير ٢٠٠٠م]



∵ الشكل : ﻫ ب ج د متوازي أضلاع والشكل: ب ج س و مربع

∴ | ﻫ د| = | س ج| ------------------------ (١)

∵ الشكل: ج د ع ص مربع

∴| د ج| = | ج ص| ------------------------ (٢)

∵ ∠ س ج ص + ∠ ب ج س + ∠ ب ج د + ∠ د ج ص = ٣٦٠°

، ∠ س ج ص + ٩٠° + ∠ ب ج د + ٩٠° = ٣٦٠°

∴ ∠ س ج ص +∠ ب ج د = ١٨٠°

∵ ∠ ﻫ د ج + ∠ ب ج د = ١٨٠° (خواص متوازي الأضلاع)

∴∠ س ج ص =∠ ﻫ د ج ------------------------ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) يتطابق △ ﻫ د ج ، △ س ج ص

∴ | ﻫ ج | = | س ص| (المطلوب أولاً)

∵∠ ﻫ ج د + ∠ د ج ص + ∠ ص ج هـ =١٨٠°

،∠ ﻫ ج د+٩٠°+ ∠ ص ج هـ=١٨٠°

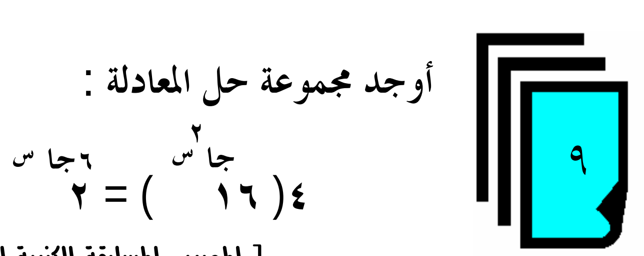
∴ ∠ ﻫ ج د+∠ ص ج هـ=٩٠°

∵ ∠ ﻫ ج د = ج ص هـ (من خواص التطابق)

∴ ∠ ص ج هـ + ∠ ج ص هـ =٩٠°

∴ ∠ ج هـ ص = ٩٠° ∴ ﻫ ج ⊥ س ص (المطلوب ثانياً)





أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$٤\left(١٦^{\text{جا}^{٢}\text{س}}\right) = ٢^{٦\,\text{جا س}} \qquad ٢\text{ط} \geqslant \text{س} \geqslant ٠$$

[المصدر : المسابقة الكندية المفتوحة– ٢٩ نوفمبر ٢٠٠٠م]



$$٢^{٢}\left(٢^{٤\text{جا}^{٢}\text{س}}\right) = ٢^{٦\,\text{جا س}}$$

$$٢^{٤\text{جا}^{٢}\text{س} + ٢} = ٢^{٦\,\text{جا س}}$$

$٤\ \text{جا}^{٢}\text{س} + ٢ = ٦\ \text{جا س}$

$٤\ \text{جا}^{٢}\text{س} - ٦\ \text{جا س} + ٢ = \text{صفر}$ (بالقسمة على ٢)

$٢\text{جا}^{٢}\text{س} - ٣\text{جا س} + ١ = \text{صفر}$

$(٢\text{جا س} - ١)\ (\text{جا س} - ١) = \text{صفر}$

$\therefore$ $٢\text{جا س} = ١$ ومنها : $\text{جا س} = \frac{١}{٢}$

، $\text{جا س} = ١$

$\therefore \text{س} = \left\{ \frac{\text{ط}}{٦} ، \frac{٥\text{ط}}{٦} ، \frac{\text{ط}}{٢} \right\}.$



١٠

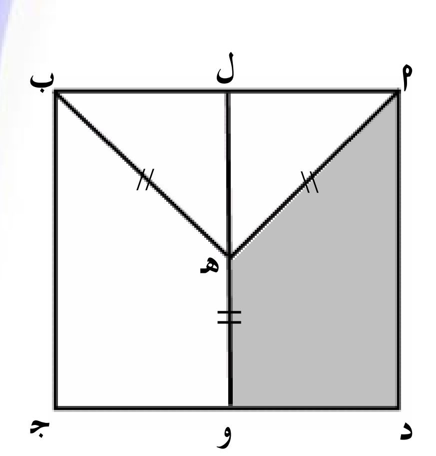
ﻭ ب جـ د مربع طول ضلعه ١ سم ، و نقطة تقع على جـ د ،

هـ نقطة تقع داخل المربع بحيث و هـ ⊥ جـ د ، | ﻭ هـ | = | ب هـ | = | و هـ | .

أوجد مساحة الشكل الرباعي ﻭ د و هـ

[المصدر : بطولة مدارس ستانفورد الأمريكية - مسابقة الهندسة – ٢٥ فبراير ٢٠٠٦م]





نفرض أن : | ﻭ هـ | = | ب هـ | = | و هـ | = س

، و هـ ∩ ﻭ ب = { ل }

∴ هـ و ⊥ د جـ ، ل ∈ و هـ

∴ | و ل | = | ب جـ | = ١ سم

∵ | ﻭ هـ | = | هـ ب | ، هـ ل ⊥ ﻭ ب

∴ ل منتصف ﻭ ب

في △ هـ ب ل :

| ل ب | = $\frac{1}{2}$ ، | ل هـ | = ١ – س ، | هـ ب | = س ، | هـ ب |^2 = | ل ب |^2 + | ل هـ |^2

∴ س^2 = ($\frac{1}{2}$)^2 + (١ - س)^2

∴ س^2 = $\frac{1}{4}$ + ١ – ٢س + س^2

∴ ٢ س = ١ $\frac{1}{4}$

∴ س = $\frac{5}{8}$

∴ | ل هـ | = ١ - $\frac{5}{8}$ = $\frac{3}{8}$

∴ مساحة الشكل الرباعي : هـ و جـ ب = مساحة المستطيل: ل و جـ ب – مساحة المثلث: ل هـ ب

∴ مساحة الشكل الرباعي : هـ و جـ ب = ($\frac{1}{2}$ × ١) – ($\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{8}$)

= $\frac{1}{2}$ - $\frac{3}{32}$

= $\frac{13}{32}$

∴ مساحة الشكل الرباعي : ﻭ د و هـ = $\frac{13}{32}$



١١

اوجد في أبسط صورة :-

$$\frac{أ^{3}}{(أ-ب)(أ-ج)}+\frac{ب^{3}}{(ب-أ)(ب-ج)}+\frac{ج^{3}}{(ج-أ)(ج-ب)}$$

[المصدر : بطولة مدارس ستانفورد الأمريكية – مسابقة الجبر – ٢٥ فبراير ٢٠٠٦م]



$$=\frac{أ^{3}(ب-أ)(ب-ج)(ج-أ)(ج-ب)+ب^{3}(أ-ب)(أ-ج)(ج-أ)(ج-ب)+ج^{3}(أ-ب)(أ-ج)(ب-أ)(ب-ج)}{(أ-ب)(أ-ج)(ب-أ)(ب-ج)(ج-أ)(ج-ب)}$$

$$=\frac{أ^{3}(ج-ب)\left[(ب-أ)(أ-ج)(ج-ب)\right]+ب^{3}(أ-ج)\left[(ب-أ)(أ-ج)(ج-ب)\right]+ج^{3}(ب-أ)\left[(ب-أ)(أ-ج)(ج-ب)\right]}{(أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)\left[(ب-أ)(أ-ج)(ج-ب)\right]}$$

بالقسمة على : $\left[(ب-أ)(أ-ج)(ج-ب)\right]$

$$=\frac{أ^{3}(ج-ب)+ب^{3}(أ-ج)+ج^{3}(ب-أ)}{(أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)}$$

$$=\frac{أ^{3}(ج-ب)+أب^{3}-ج ب^{3}+ب ج^{3}-أ ج^{3}}{(أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)}$$

$$=\frac{أ^{3}(ج-ب)+أ(ب^{3}-ج^{3})+ب ج^{3}-ج ب^{3}}{(أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)}$$

$$=\frac{أ^{3}(ج-ب)+أ\left[(ب-ج)(ب^{2}+ب ج+ج^{2})\right]+ب ج(ج^{2}-ب^{2})}{(أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)}$$

$$=\frac{أ^{3}(ج-ب)-أ\left[(ج-ب)(ب^{2}+ب ج+ج^{2})\right]+ب ج(ج-ب)(ج+ب)}{(أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)}$$

$$=\frac{أ^{3}(ج-ب)-أ(ج-ب)(ب^{2}+ب ج+ج^{2})+ب ج(ج-ب)(ج+ب)}{(أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)}$$

$$=\frac{(ج-ب)\left[أ^{3}-أ(ب^{2}+ب ج+ج^{2})+ب ج(ج+ب)\right]}{(أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)}$$



$$= \frac{\{\text{ج} - \text{ب}\}\left[\text{أ}^{3} - \text{أ}\{\text{ب}^{2} + \text{ب ج} + \text{ج}^{2}\} + \text{ب ج}^{2} + \text{ب}^{2}\text{ج}\right]}{\{\text{أ} - \text{ب}\}\{\text{ب} - \text{ج}\}\{\text{ج} - \text{أ}\}}$$

$$= - \frac{\{\text{ب} - \text{ج}\}\left[\text{أ}^{3} - \text{أ}\{\text{ب}^{2} + \text{ب ج} + \text{ج}^{2}\} + \text{ب ج}^{2} + \text{ب}^{2}\text{ج}\right]}{\{\text{أ} - \text{ب}\}\{\text{ب} - \text{ج}\}\{\text{ج} - \text{أ}\}}$$

$$= - \frac{\text{أ}^{3} - \text{أ}\{\text{ب}^{2} + \text{ب ج} + \text{ج}^{2}\} + \text{ب ج}^{2} + \text{ب}^{2}\text{ج}}{\{\text{أ} - \text{ب}\}\{\text{ج} - \text{أ}\}}$$

$$= - \frac{\text{أ}^{3} - \text{أ ب}^{2} - \text{أ ب ج} - \text{أ ج}^{2} + \text{ب ج}^{2} + \text{ب}^{2}\text{ج}}{\{\text{أ} - \text{ب}\}\{\text{ج} - \text{أ}\}}$$

$$= - \frac{\text{ب}^{2}\{\text{ج} - \text{أ}\} + \text{ب ج}\{\text{ج} - \text{أ}\} + \text{أ}\{\text{أ}^{2} - \text{ج}^{2}\}}{\{\text{أ} - \text{ب}\}\{\text{ج} - \text{أ}\}}$$

$$= - \frac{\text{ب}^{2}\{\text{ج} - \text{أ}\} + \text{ب ج}\{\text{ج} - \text{أ}\} + \text{أ}\{\text{أ} - \text{ج}\}\{\text{أ} + \text{ج}\}}{\{\text{أ} - \text{ب}\}\{\text{ج} - \text{أ}\}}$$

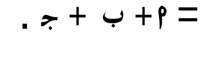
$$= - \frac{\text{ب}^{2}\{\text{ج} - \text{أ}\} + \text{ب ج}\{\text{ج} - \text{أ}\} - \text{أ}\{\text{ج} - \text{أ}\}\{\text{أ} + \text{ج}\}}{\{\text{أ} - \text{ب}\}\{\text{ج} - \text{أ}\}}$$

$$= - \frac{\{\text{ج} - \text{أ}\}\left[\text{ب}^{2} + \text{ب ج} - \text{أ}\{\text{أ} + \text{ج}\}\right]}{\{\text{أ} - \text{ب}\}\{\text{ج} - \text{أ}\}}$$

$$= - \frac{\text{ب}^{2} + \text{ب ج} - \text{أ}^{2} - \text{أ ج}}{\{\text{أ} - \text{ب}\}} = \frac{\text{أ}^{2} + \text{أ ج} - \text{ب ج} - \text{ب}^{2}}{\{\text{أ} - \text{ب}\}}$$

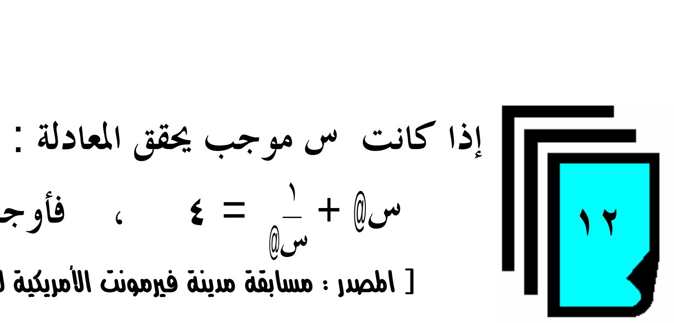
$$= \frac{\{\text{أ}^{2} - \text{ب}^{2}\} + \text{ج}\{\text{أ} - \text{ب}\}}{\{\text{أ} - \text{ب}\}} = \frac{\{\text{أ} - \text{ب}\}\{\text{أ} + \text{ب}\} + \text{ج}\{\text{أ} - \text{ب}\}}{\{\text{أ} - \text{ب}\}}$$

$$= \frac{\{\text{أ} - \text{ب}\}\left[\text{أ} + \text{ب} + \text{ج}\right]}{\{\text{أ} - \text{ب}\}}$$



$$= \text{أ} + \text{ب} + \text{ج} .$$





١٢

إذا كانت س موجب يحقق المعادلة :

$\text{س}^{2} + \frac{1}{\text{س}^{2}} = 4$ ، فأوجد قيمة : $\text{س} + \frac{1}{\text{س}}$

[المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية– ١٣ مارس ٢٠٠٢م]



$\because \left\{\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right\}^{2} = \text{س}^{2} + 2 + \frac{1}{\text{س}^{2}}$

$= \left\{\text{س}^{2} + \frac{1}{\text{س}^{2}}\right\} + 2$

$= 4 + 2 = 6$

$\therefore \text{س} + \frac{1}{\text{س}} = \sqrt{6}$



١٣

إذا كانت : $م > صفر$ ، $\sqrt{م\sqrt{م\sqrt{م}}} = ١٢٨$

اوجد : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{م}}}$

[المصدر : مسابقة المدارس الثانوية لولاية أوكلاهوما الأمريكية – المستوى الثاني -١٨مارس ٢٠٠٦]



$$\sqrt{م\sqrt{م\sqrt{م}}} = \sqrt{م\sqrt{م \times م^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{م\sqrt{م^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{م \times \{م^{\frac{3}{2}}\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sqrt{م \times م^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{م^{\frac{7}{4}}} = \{م^{\frac{7}{4}}\}^{\frac{1}{2}} = م^{\frac{7}{8}} = ١٢٨$$

$\therefore م^{\frac{7}{8}} = ٢^{٧}$

$\therefore م^{\frac{1}{8}} = ٢$ --------------------(١)

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{م}}} = \sqrt{\sqrt{م^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{م^{\frac{1}{4}}} = م^{\frac{1}{8}}$ ------------------(٢)

من (١ ، ٢)

$\therefore \sqrt{\sqrt{\sqrt{م}}} = ٢$



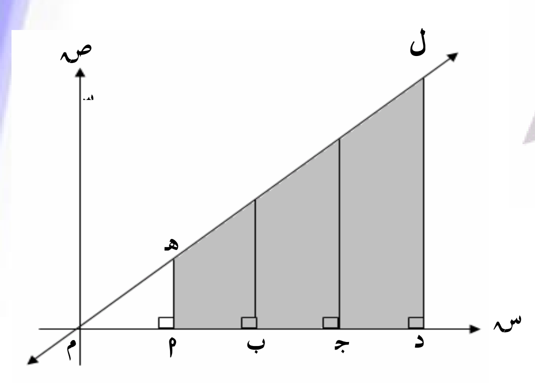
على الشكل :

| م ٩ | = | ٩ ب | = | ب جـ | = | جـ د | = ٧ أقدام

ومساحة الجزء المظلل = ١٨ قدم مربع ، أوجد: ميل المستقيم م ل

[المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية – ٣ مارس ٢٠٠٥م]





من تشابه Δ Δ ٩ هـ م ، د ل م

∴ |٩ هـ| / |ل د| = |م ٩| / |د م|

∴ |٩ هـ| / |ل د| = ٧ / ٢٨ = ١ / ٤

∴ |٩ هـ| = ١/٤ |ل د|

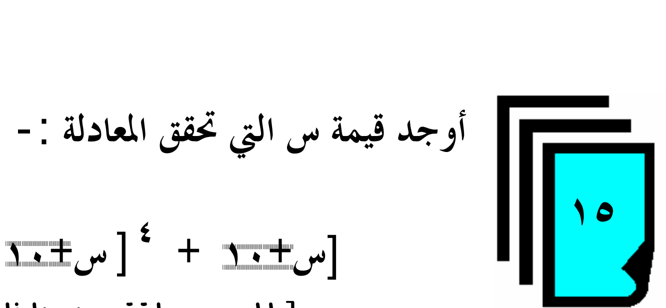
∵ مساحة سطح شبه المنحرف ل د ٩ هـ = ١/٢ { |٩ هـ| + |ل د|} × |٩ د|

= ١/٢ {١/٤ |ل د| + |ل د|} × ٢١

= ١/٢ × ٥/٤ |ل د| × ٢١

∴ |ل د| = (٨×١٨) / (٥×٢١)

∴ ميل |ل م| = ظا {∠ د م ل} = (٨×١٨) / (٢٨×٥×٢١) = ١٢ / ٢٤٥





أوجد قيمة س التي تحقق المعادلة :-

$$\sqrt{\text{س}+١٠} + \sqrt[٤]{\text{س}+١٠} = ١٢$$

[المصدر : مسابقة معهد هارفارد الأمريكي – ٢٨ فبراير ٢٠٠٤م]



نفرض أن : $\sqrt[٤]{\text{س}+١٠} = \text{ص}$

∴ $\text{ص}^{٢} + \text{ص} - ١٢ = \text{صفر}$

∴ $\{\text{ص} + ٤\}\{\text{ص} - ٣\} = \text{صفر}$

∴ ص = - ٤ ، ص = ٣

∴ $\sqrt[٤]{\text{س}+١٠} = -٤$ (مرفوض)

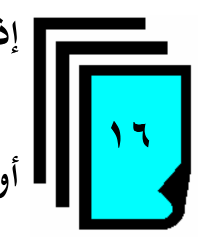
∴ $\sqrt[٤]{\text{س}+١٠} = ٣$

∴ $\text{س} + ١٠ = ٣^{٤}$

∴ س + ١٠ = ٨١

∴ س = ٨١ – ١٠

∴ س = ٧١



إذا كان : ٢، ب ، ج جذور المعادلة :

$$س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥ س + ٨ = \text{صفر}$$

أوجد قيمة : $\frac{١}{٢ ب} + \frac{١}{ب ج} + \frac{١}{٢ ج}$

[المصدر : مسابقة معهد هارفارد الأمريكي – ٢٨ فبراير ٢٠٠٤م]



$$\frac{١}{٢ ب} + \frac{١}{ب ج} + \frac{١}{٢ ج} = \frac{٢ + ب + ج}{٢ ب ج} \quad \text{----------------} (١)$$

∵ ٢، ب ، ج جذور المعادلة : $س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥ س + ٨ =$ صفر

∴ $\{س - ٢\}\{س - ب\}\{س - ج\} = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥ س + ٨$

∴ $س^{٣} - ج س^{٢} - ب س^{٢} + ب ج س - ٢ س^{٢} + ٢ ج س + ٢ ب س - ٢ ب ج = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥ س + ٨$

∴ $س^{٣} - \{٢ + ب + ج\} س^{٢} + \{٢ ب + ب ج + ٢ ج\} س - ٢ ب ج = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥ س + ٨$

بمساواة المعاملات

∴ ٢ + ب + ج = ٢ ، ٢ ب ج = -٨

بالتعويض في (١)

$$\frac{١}{٢ ب} + \frac{١}{ب ج} + \frac{١}{٢ ج} = \frac{٢ + ب + ج}{٢ ب ج}$$

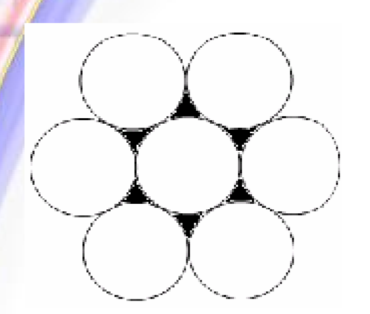
$$= \frac{٢}{-٨} = \frac{-١}{٤}$$



١٧

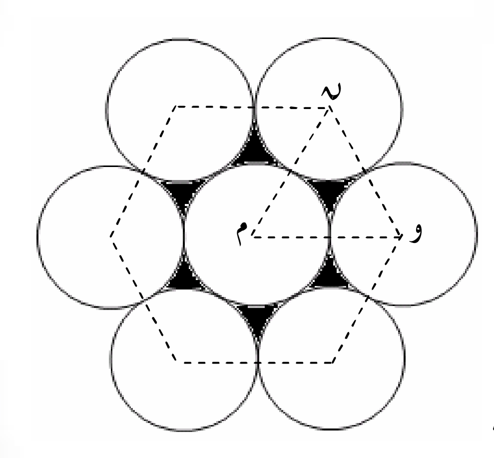
على الشكل :

سبعة دوائر ، الدوائر الخارجية متماسة مثنى مثنى وتمس الدوائر الخارجية الدائرة الداخلية ، إذا كانت جميع الدوائر متطابقة ونصف قطرها ١ سم . أوجد مساحة الجزء المظلل



[المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية–٤مارس٢٠٠٤م]





نصل مراكز الدوائر الست، ونصل رؤوس المثلث و م ن

∴ طول ضلع Δ المتطابق الأضلاع : و م ن = ٢ سم

∴ مساحة Δ : و م ن = $\frac{1}{2}$ × ٢ × ٢ × جا ٦٠

= $\frac{1}{2}$ × ٢ × ٢ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

= $\sqrt{3}$ سم^{2}

∴ مساحة السداسي المنتظم = ٦ × $\sqrt{3}$ = ٦ $\sqrt{3}$ سم^{2}

∵ قياس زاوية رأس السداسي المنتظم = ١٢٠°

∴ مساحة سطح أي دائرة من الدوائر الست ∩ مساحة سطح السداسي = $\frac{1}{3}$ مساحة سطح هذه الدائرة

∴ $\frac{1}{3}$ مساحة سطح الدائرة الواحدة = $\frac{1}{3}$ × ط × ١^{2} = $\frac{1}{3}$ ط سم^{2}

∴ مجموع مساحات أجزاء الدوائر الست داخل السداسي المنتظم = ٦ × $\frac{1}{3}$ ط = ٢ط سم^{2}

∵ مساحة الدائرة السابعة (الوسطى) = ط نق^{2} = ط × ١^{2} = ط سم^{2}

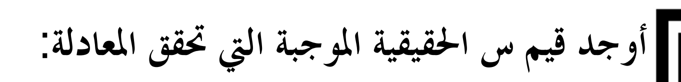
∵ مساحة الجزء المظلل = مساحة سطح السداسي المنتظم - [مجموع مساحات أجزاء الدوائر الست داخل السداسي المنتظم + مساحة الدائرة السابعة]

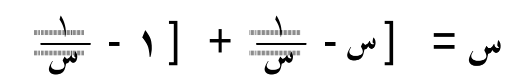
= ٦ $\sqrt{3}$ − [٢ط + ط]

= { ٦ $\sqrt{3}$ - ٣ط } سم^{2}



١٨


أوجد قيم س الحقيقية الموجبة التي تحقق المعادلة:


$$\text{س} = \sqrt{\text{س} - \frac{1}{\text{س}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\text{س}}}$$

[المصدر : مسابقة معهد هارفارد الأمريكي – ٢٨ فبراير ٢٠٠٤م]



$$\text{س} - \sqrt{\text{س} - \frac{1}{\text{س}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\text{س}}}$$

$$\text{س} - \sqrt{\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}}} = \sqrt{\frac{\text{س} - 1}{\text{س}}}$$ (بالتربيع)

$$\text{س}^2 - 2\,\text{س} \times \sqrt{\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}}} + \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}} = \frac{\text{س} - 1}{\text{س}}$$

$$\text{س}^2 - 2 \times \sqrt{\text{س}^2}\left[\sqrt{\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}}}\right] + \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}} - \left[\frac{\text{س} - 1}{\text{س}}\right] = \text{صفر}$$

$$\text{س}^2 - 2\sqrt{\text{س}\{\text{س}^2 - 1\}} + \frac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س}} = \text{صفر}$$

$$\text{س}^2 - 2\sqrt{\text{س}\{\text{س}^2 - 1\}} + \text{س} - 1 = \text{صفر}$$

$$\{\text{س}^2 - 1\} - 2\sqrt{\text{س}\{\text{س}^2 - 1\}} + \text{س} = \text{صفر}$$ (مقدار مربع كامل)

$$\left\{\sqrt{\text{س}^2 - 1} - \sqrt{\text{س}}\right\}^2 = \text{صفر}$$

$$\sqrt{\text{س}^2 - 1} - \sqrt{\text{س}} = \text{صفر}$$

$$\sqrt{\text{س}^2 - 1} = \sqrt{\text{س}}$$



$س^{٢} - ١ = س$

$س^{٢} - س - ١ = صفر$

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية من الدرجة الثانية

$$س = \frac{١ _ [٥}{٢}$$

$\because$ س > صفر ، ١ < [٥

$$\therefore س = \frac{١+ [٥}{٢}$$



١٩

بفرض أن أحد المزارعين اشترى ١٠٠ حيوان وطائر بمبلغ ١٠٠ دولار ، حيث كان ثمن البقرة الواحدة ١٠ دولارات ، وثمن الخروف الواحد ٣ دولارات والدجاجة الواحدة ٥٠ سنتاً .كم اشترى المزارع من كل نوع من الأنواع السابقة (الدولار = ١٠٠ سنت)

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ١٨ فبراير ٢٠٠٤م]



نفرض أن : عدد البقرات = س ، عدد الخراف = ص ، عدد الدجاج = ع

∴ ع = ١٠٠ – س – ص ------------------(١)

(وبالنسبة لثمن الشراء بعد تحول ٥٠ سنتاً إلى ٠,٥٠دولار)

∴ ١٠س + ٣ص + ٠,٥ع = ١٠٠ (بالضرب ×١٠٠)

∴ ١٠٠٠س + ٣٠٠ص + ٥٠ع = ١٠٠٠٠ ------------------(٢)

بالتعويض من (١)في (٢)

∴ ١٠٠٠س + ٣٠٠ص + ٥٠ {١٠٠ – س – ص } = ١٠٠٠٠

∴١٠٠٠س + ٣٠٠ص +٥٠٠٠ – ٥٠س _ ٥٠ص = ١٠٠٠٠

∴ ٩٥٠ س +٢٥٠ ص = ٥٠٠٠ (بالقسمة على ٥٠)

∴١٩س + ٥ص = ١٠٠

∴ ٥ ص = ١٠٠ – ١٩ س (بالقسمة على ٥)

∴ ص = ٢٠ - $\frac{١٩}{٥}$ س

وعند ملاحظة المعادلة الأخيرة نجد أنه يجب أن تكون قيمة س موجبة وتقبل القسمة على ٥

أي أنه يجب أن تكون قيمة س = صفر أو ٥

وفي حالة : س= صفر ∴ ص = ٢٠ ، ع = ٨٠

(أي : عدد البقرات = صفر ، عدد الخراف =٢٠ ، عدد الدجاج =٨٠)

وفي حالة : س=٥ ∴ ص = ١ ، ع = ٩٤

(أي : عدد البقرات =٥ ، عدد الخراف =١ ، عدد الدجاج =٩٤)



٢٠

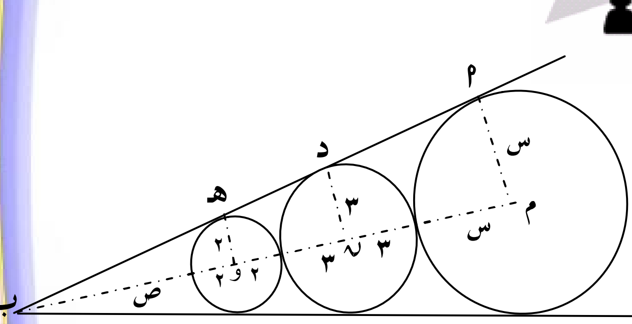
على الشكل المجاور:

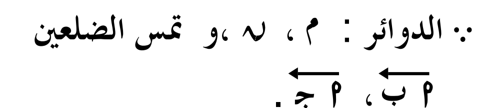
ثلاث دوائر ، الصغرى نصف قطرها ٢ سم وتمس الدائر ة الوسطي التي نصف قطرها ٣سم ، والتي تمسالدائرة الكبري التي نصف قطرها نق ، والدوائر الثلاث تمس المستقيمين الموضحين بالرسم .

أوجد طول نق .

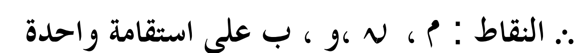
[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –٢٣ فبراير ٢٠٠٥م]







∵ الدوائر : م ، ن ،و تمس الضلعين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أج}$.



∴ النقاط : م ، ن ،و ، ب على استقامة واحدة

∴ نصل أ ب ، م أ ، ن د ، و هـ

∴ م أ، ن د ، و هـ أعمدة على المماس أ ب

من تشابه ∆ ∆ ب و هـ ، ب ن د

$$\therefore \frac{|ب و|}{|ب ن|} = \frac{|و هـ|}{|ن د|}$$

$$\therefore \frac{ص + ٢}{ص + ٧} = [illegible]$$

∴ ٣ص +٦ = ٢ص +١٤

∴ ص = ٨ سم

من تشابه ∆ ∆ ب و هـ ، ب م أ

$$\therefore \frac{|ب و|}{|ب م|} = \frac{|و هـ|}{|م أ|} \qquad \therefore \frac{١٠}{١٨ - س} = \frac{٢}{س}$$

١٠س = ٣٦ +٢س

٨ س = ٣٦

س = ٤,٥سم. ∴ نق= ٤,٥سم





إذا كانت : ٢(١، ٠) ، ب (٣ ، ٠) ، جـ (٣، ٥) ، د (١، ٤) هي رؤوس شبه منحرف . أوجد معادلة المستقيم الذي يقسمه إلى نصفين متطابقين في المساحة.

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ٢١ فبراير ٢٠٠١م]



نفرض أن معادلة المستقيم الذي يقسم شبه المنحرف

ص = م س

∴ للحصول على إحداثي نقطة تقاطع ٢ د مع المستقيم : ص = م س

∵ الاحداثي السيني للنقطة و = ١

∴ بالتعويض في معادلة المستقيم : ص = م س

∴ ص = ١ × م = م

∴ احداثي نقطة : و = (١، م)

بالمثل ∴ احداثي نقطة : هـ = (٣ ، ٣م)

∵ مساحة شبه المنحرف ٢ ب جـ د = $\frac{1}{2}$ [مجموع القاعدتين المتوازيتين] × الارتفاع

∴ مساحة شبه المنحرف ٢ ب جـ د = $\frac{1}{2}$ [| ب جـ | + | ٢ د |] × ٢

∴ مساحة شبه المنحرف ٢ ب جـ د = $\frac{1}{2}$ [٤ + ٥] × ٢ = ٩ سم٢

∵ مساحة نصف شبه المنحرف ٢ ب جـ د = مساحة شبه المنحرف ب هـ و ٢

∴ مساحة نصف شبه المنحرف ٢ ب جـ د = $\frac{1}{2}$ [م + ٣م] × ٢ = ٤ م سم٢

∵ مساحة نصف شبه المنحرف ٢ ب جـ د = $\frac{٩}{٢}$ سم٢

∴ ٤ م = $\frac{٩}{٢}$

∴ م = $\frac{٩}{٨}$

∴ معادلة المستقيم : ص = $\frac{٩}{٨}$ س

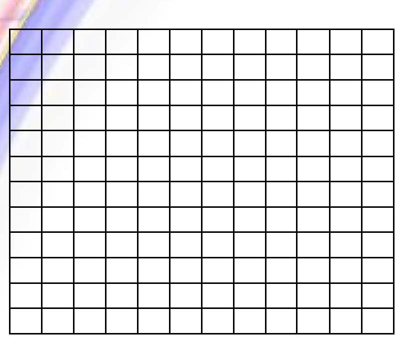
٢٢

هل تستطيع تقسيم السجادة التي أبعادها

(١٢، ١٢) قدم

و الموضحة بالشكل المجاور إلى:-

- قسمين لتغطية سطح غرفة أبعادها (١٨ ، ٨) قدم.
- قسمين لتغطية سطح غرفة أبعادها (١٦، ٩) قدم.

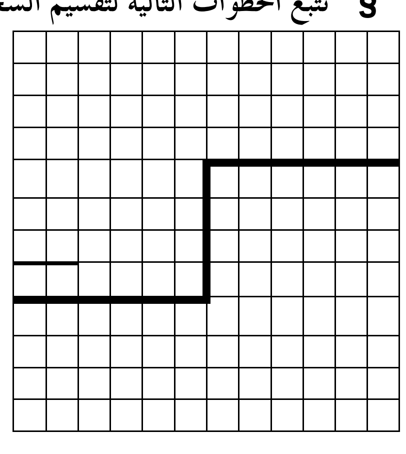


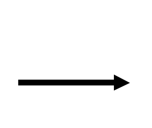
١٢ × ١٢

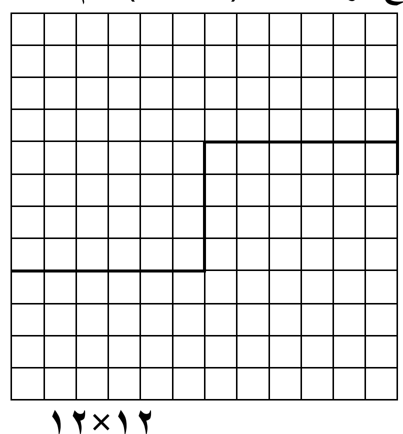
[مسابقة – مدارس UNM-PNM بولاية نيو مكسيكو الأمريكية – الدور الأول – ١٣ نوفمبر ٢٠٠٤]



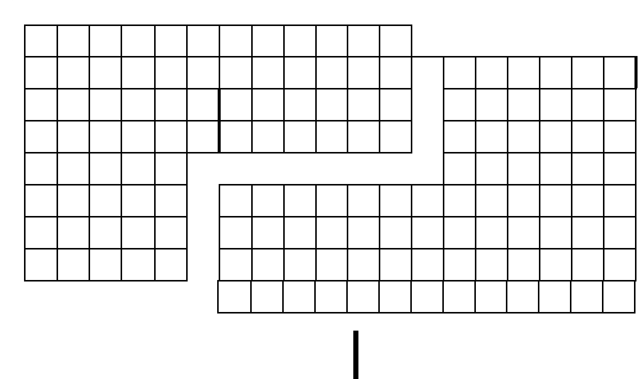
§ نتبع الخطوات التالية لتقسيم السجادة قسمين لتغطية سطح غرفة أبعادها (١٨ ، ٨) قدم

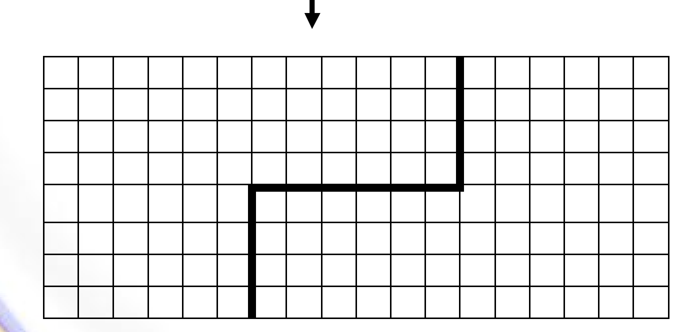






١٢×١٢





١٨×٨

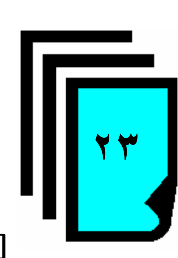


§ نتبع الخطوات التالية لتقسيم السجادة قسمين لتغطية سطح غرفة أبعادها (١٦ ،٩) قدم

١٢×١٢

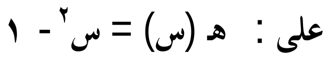
١٦×٩





اذكر باقي قسمة :

م{س} = ١ − س + ٢ س^{٤} − ٣ س^{٩} + ٤ س^{١٦} − ٥ س^{٢٥} + ٦ س^{٣٦} + س^{٢٠٠٥}


على : ه(س) = س^{٢} - ١

[مسابقة – مدارس UNM-PNM بولاية نيو مكسيكو الأمريكية – الدور الأول –٢١نوفمبر ٢٠٠٥م]

الحل

∵ م{س} = ك{س} × ه {س} +د {س}

حيث : ك{س} خارج القسمة ، ه {س} المقسوم ، د {س} الباقي

∵ ه {س} كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

∴ د {س} من الدرجة الأولى أو أقل

نفرض أن : د {س} = ﻡ س + ب

∴ م{س} = ك{س} × ه {س} + ﻡ س + ب

∵ العدد ١ جذر من جذور : ه {س} (باستخدام نظرية الباقي)

∴ م{١} = ك {١} × ه {١} + ﻡ + ب

∵ م{١} = ١ − ١ + ٢ − ٣ + ٤ − ٥ + ٦ +١

= ١٣ − ٨ = ٥

∵ ه { ١} = صفر

∴ ٥ = ك { ١} × صفر + ﻡ + ب

∴ ﻡ + ب = ٥ ------------------(١)

∵ العدد - ١ جذر من جذور : ه {س}

∵ م{ - ١} = ١+١+٢+٣+٤+٥+٦-١ = ٢١

∵ م{-١} = ك { - ١} × صفر - ﻡ + ب

∴ - ﻡ + ب = ٢١ ------------------(٢)

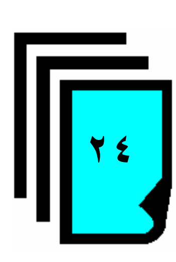
من (١) ، (٢)

٢ ب = ٢٦ ، ومنها ب = ١٣

∴ ﻡ = -٨

∴ د(س)= -٨س + ١٣





اثبت أن :

الفرق بين مربعي أي عددين فرديين يقبل القسمة على ٨

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ٢١ فبراير ٢٠٠١م]



نفرض أن العددين الفرديين هما : س= ٢ أ+١ ، ص = ٢ ب+١

∴ س^{٢} - ص^{٢} = {٢ أ+١}^{٢} - {٢ ب+١}^{٢}

= ٤ أ^{٢} + ٤ أ+ ١ - { ٤ ب^{٢}+ ٤ ب+ ١}

= ٤ أ^{٢} + ٤ أ+ ١ - ٤ ب^{٢} - ٤ ب - ١

= ٤ أ^{٢} + ٤ أ - ٤ ب^{٢} - ٤ ب

= ٤ {أ^{٢} + أ - ب^{٢} - ب}

= ٤ [أ{ أ+ ١ } - ب{ ب - ١}]

∴ س^{٢} - ص^{٢} تقبل القسمة على :٤

∵ حاصل ضرب أي عددين أحدهما زوجي والآخر فردي = عدد زوجي

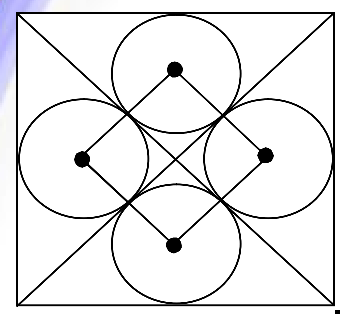
∴ أ × { أ+ ١ } عدد زوجي ، ب × { ب - ١} عدد زوجي

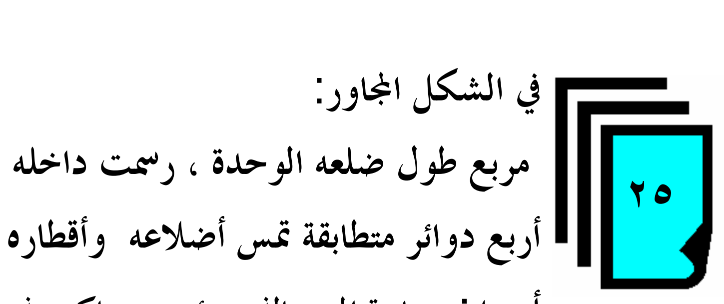
∴ أ{ أ+ ١ } - ب{ ب - ١} عدد زوجي

∴ أ{ أ+ ١ } - ب{ ب - ١} يقبل القسمة على :٢

∴ س^{٢} - ص^{٢} تقبل القسمة على : ٨



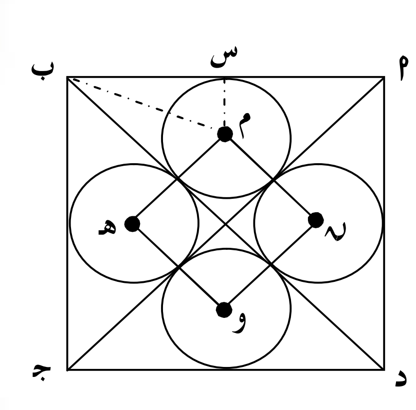




في الشكل المجاور:
مربع طول ضلعه الوحدة ، رسمت داخله
أربع دوائر متطابقة تمس أضلاعه وأقطاره .
أوجد: مساحة المربع الذي رؤوسه مراكز هذه الدوائر.

[المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية–٩ مارس ٢٠٠٦م]





نصل : س م ، م ب

نفرض أن نصف قطر أي دائرة = نق

∵ م ب ينصف ∠ م ب د

(حيث س ب ، د ب مماسان للدائرة م من نقطة واحدة)

∴ ∠ س ب م = $\frac{45^\circ}{2}$ = ٢٢,٥ °

∴ في △ م ب س القائم في ∠ س

∴ ظا { م ب س} = $\frac{|م س|}{|س ب|}$

∴ ظا ($\frac{45^\circ}{2}$) = نق ÷ $\frac{1}{2}$

∴ نق = $\frac{1}{2}$ ظا ($\frac{45^\circ}{2}$)

∴ ٢ نق = ظا ($\frac{45^\circ}{2}$)

∴ ٢ نق = ٠,٤١٤

∵ طول ضلع المربع م ن و ه = ٢ نق

∴ مساحة المربع = ٠,٤١٤ × ٠,٤١٤ = ٠,١٧١ وحدة مربعة





أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$\frac{\text{س}+1}{2+\sqrt{\text{س}}} - \frac{1}{2-\sqrt{\text{س}}} = 3$$

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ٢١ فبراير ٢٠٠١م]



$$\frac{\text{س}+1}{2+\sqrt{\text{س}}} - \frac{1}{2-\sqrt{\text{س}}} = \frac{\{\text{س}+1\}\{2-\sqrt{\text{س}}\} - (2+\sqrt{\text{س}})}{4-\text{س}} = 3$$

$\therefore \{\text{س}+1\}\{2-\sqrt{\text{س}}\} - (2+\sqrt{\text{س}}) = 3\{4-\text{س}\}$

$\therefore 2\text{س} - \text{س}\sqrt{\text{س}} + 2 - \sqrt{\text{س}} - 2 - \sqrt{\text{س}} = 12 - 3\text{س}$

$\therefore -\text{س}\sqrt{\text{س}} - 2\sqrt{\text{س}} = 12 - 5\text{س}$

$\therefore \text{س}\sqrt{\text{س}} - 5\text{س} + 2\sqrt{\text{س}} + 12 = \text{صفر}$

نفرض أن: $\sqrt{\text{س}} = \text{ص}$ ومنها $\text{س} = \text{ص}^2$

$\therefore \text{ص}^3 - 5\text{ص}^2 + 2\text{ص} + 12 = \text{صفر}$

$\text{ص}^3 - 5\text{ص}^2 + 2\text{ص} + 12 + 27 - 27 = \text{صفر}$

$\{\text{ص}^3 - 27\} + \{-5\text{ص}^2 + 2\text{ص} + 39\} = \text{صفر}$

$\{\text{ص}^3 - 27\} - \{5\text{ص}^2 - 2\text{ص} - 39\} = \text{صفر}$

$\{\text{ص}-3\}\{\text{ص}^2 + 3\text{ص} + 9\} - [\{\text{ص}-3\}\{5\text{ص}+13\}] = \text{صفر}$

$\{\text{ص}-3\}[\text{ص}^2 + 3\text{ص} + 9 - 5\text{ص} - 13] = \text{صفر}$

$\{\text{ص}-3\}[\text{ص}^2 - 2\text{ص} - 4] = \text{صفر}$

$\therefore \text{ص} - 3 = \text{صفر}$ ومنها: $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} = 3$

$\therefore \text{س} = 9$

وبحل المعادلة: $\text{ص}^2 - 2\text{ص} - 4 = \text{صفر}$ باستخدام القانون العام

$$\text{ص} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج}}}{2\text{أ}}$$



∴ ص = ١ − √٥

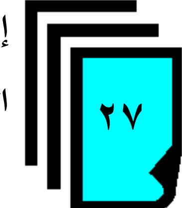
∴ ص = √س = ١ − √٥ (بالتربيع)

∴ س = { ١ − √٥ }^{٢}

= ١ − ٢ √٥ + ٥

= ٦ − √٥

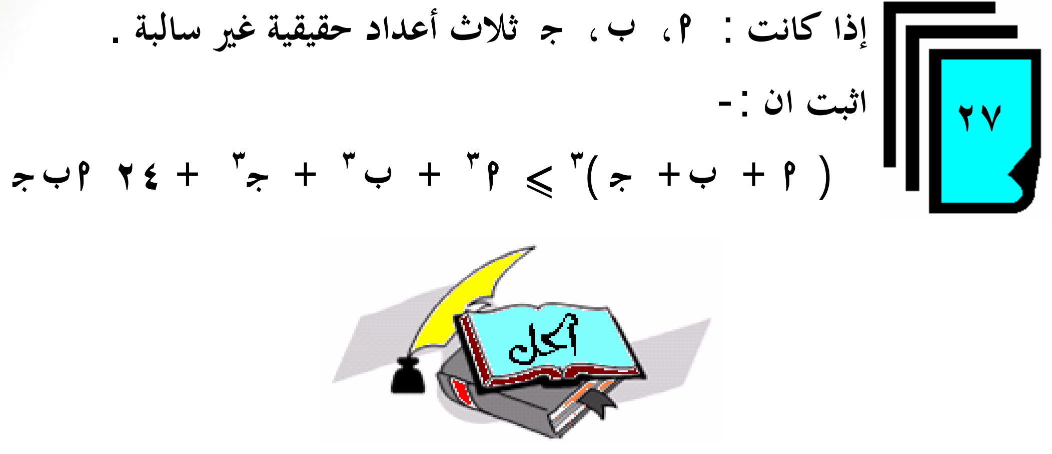
∴ مجموعة حل المعادلة = { ٩ ، ٦ - √٥ ، ٦ + √٥ }.





إذا كانت : م ، ب ، ج ثلاث أعداد حقيقية غير سالبة .

اثبت ان :-



$$(\text{م} + \text{ب} + \text{ج})^{3} \geqslant \text{م}^{3} + \text{ب}^{3} + \text{ج}^{3} + 24\,\text{م ب ج}$$

نبدأ بالمتباينة :-

$$\text{م}\{\text{ب} - \text{ج}\}^{2} + \text{ب}\{\text{ج} - \text{م}\}^{2} + \text{ج}\{\text{م} - \text{ب}\}^{2} \geqslant \text{صفر}$$

∵ م ، ب ، ج ثلاث أعداد حقيقية غير سالبة.

∴ الكميات المربعة موجبة.

$$\therefore \text{م}\{\text{ب}^{2} - 2\,\text{ب ج} + \text{ج}^{2}\} + \text{ب}\{\text{ج}^{2} - 2\,\text{ج م} + \text{م}^{2}\} + \text{ج}\{\text{م}^{2} - 2\,\text{م ب} + \text{ب}^{2}\} \geqslant \text{صفر}$$

$$\therefore \text{م ب}^{2} - 2\text{م ب ج} + \text{م ج}^{2} + \text{ب ج}^{2} - 2\,\text{ب ج م} + \text{م}^{2}\text{ب} + \text{ج م}^{2} - 2\text{ج م ب} + \text{ج ب}^{2} \geqslant \text{صفر}$$

$$\therefore \text{م ب}^{2} + \text{م ج}^{2} + \text{ب ج}^{2} + \text{م}^{2}\text{ب} + \text{ج م}^{2} + \text{ج ب}^{2} \geqslant 6\,\text{م ب ج} \text{------------}(1)$$

$$\because \{\text{م} + \text{ب} + \text{ج}\}^{3} = \text{م}^{3} + \text{ب}^{3} + \text{ج}^{3} + 3\,\{\text{م}^{2}\text{ب} + \text{م}^{2}\text{ج} + \text{م ب}^{2} + \text{ب}^{2}\text{ج} + \text{ج}^{2}\text{م} + \text{ج}^{2}\text{ب}\} + 6\,\text{م ب ج} \text{---}(2)$$

بالتعويض من (١) في (٢)

$$\therefore \{\text{م} + \text{ب} + \text{ج}\}^{3} \geqslant \text{م}^{3} + \text{ب}^{3} + \text{ج}^{3} + 3\,\{6\,\text{م ب ج}\} + 6\,\text{م ب ج}$$

$$\therefore \{\text{م} + \text{ب} + \text{ج}\}^{3} \geqslant \text{م}^{3} + \text{ب}^{3} + \text{ج}^{3} + 18\,\text{م ب ج} + 6\,\text{م ب ج}$$

$$\therefore \{\text{م} + \text{ب} + \text{ج}\}^{3} \geqslant \text{م}^{3} + \text{ب}^{3} + \text{ج}^{3} + 24\,\text{م ب ج}..$$



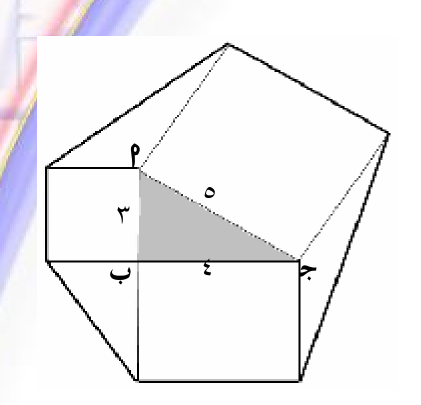
٢٨

على الشكل :

أ ب ج أطوال أضلاعه |أ ب|= ٣ سم ،|ب ج|= ٤ سم ، |أ ج|=٥ سم.

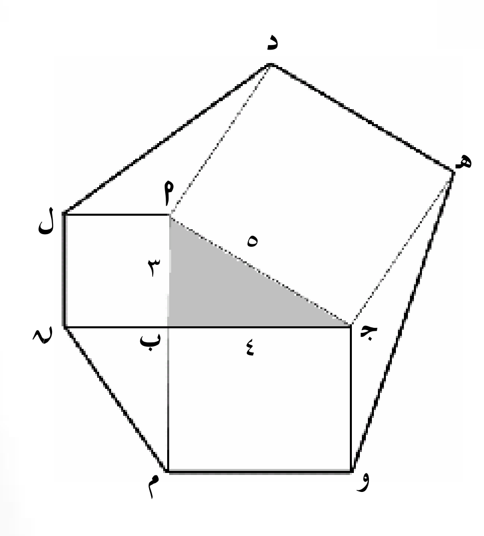
أنشأنا على كل ضلع من أضلاعه مربعاً ،

أوجد مساحة الشكل الخماسي الغير منتظم



[المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية–١٣ مارس ٢٠٠٢م]





مساحة سطح المربع : أ ب ن ل = ٣ × ٣ = ٩ سم^{٢}

مساحة سطح المربع: م و ج ب = ٤ × ٤ =١٦سم^{٢}

مساحة سطح المربع : أ ج هـ د = ٥ × ٥ = ٢٥سم^{٢}

مساحة سطح : Δ م ب ن القائم في ∠ ب

= ½ {٣×٤} =٦ سم^{٢}

في Δ ج أ ب ∵ جا ∠ ج أ ب = ٤/٥

، ∵ ∠ د أ ل تكمل ∠ ج أ ب

∴ جا ∠ د أ ل = ٤/٥

بالمثل في Δ ج و هـ ∵ ∠ أ ج ب تكمل ∠ هـ ج و

∴ جا∠ هـ ج و = ٣/٥

∴ مساحة سطح Δ أ د ل = ½ {٣×٥ × جا ∠ د أ ل }

= ½ {٣×٥ ×٤/٥ } =٦ سم^{٢}

، مساحة سطح Δ هـ ج و= ½ {٣×٥ × جا ∠ هـ ج و}

= ½ {٤×٥ × ٣/٥ } =٦ سم^{٢}

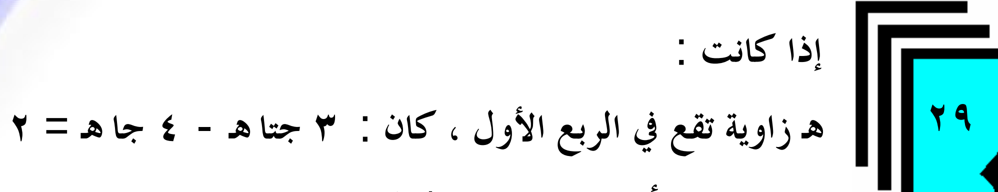
∴ مساحة سطح السداسي الغير منتظم : هـ و م ن ل د

= ٩+١٦ + ٢٥ + ٦ + ٦ + ٦ + ٦ = ٧٤سم^{٢}





٢٩



إذا كانت :

هـ زاوية تقع في الربع الأول ، كان : ٣ جتا هـ - ٤ جا هـ = ٢

أوجد : ٣ جا هـ + ٤ جتا هـ

[مسابقة – مدارس UNM-PNM بولاية نيو مكسيكو الأمريكية – الدور الأول – ١٣ نوفمبر ٢٠٠٤ م]



∵ { ٣جتا هـ – ٤جا هـ}^{٢} + { ٣جا هـ – ٤ جتا هـ}^{٢} = ٩جتا^{٢}هـ – ٢٤ جتا هـ جا هـ + ١٦جا^{٢} هـ +٩جا^{٢} هـ +٢٤ جتا هـ جا هـ +١٦جتا^{٢} هـ

= ٩جتا^{٢}هـ + ١٦جا^{٢} هـ +٩جا^{٢} هـ +١٦جتا^{٢} هـ

= ٩{ جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ} + ١٦ { جتا^{٢}هـ+ جا^{٢}هـ}

=٩+ ١٦ =٢٥

∴ { ٣جتا هـ – ٤جا هـ}^{٢} + { ٣جا هـ – ٤ جتا هـ}^{٢} = ٢٥

∵ ٣جتا هـ - ٤ جا هـ = ٢

∴{ ٢}^{٢} + { ٣جا هـ – ٤ جتا هـ}^{٢} = ٢٥

∴ ٤ + { ٣جا هـ – ٤ جتا هـ}^{٢} = ٢٥

∴ { ٣جا هـ – ٤ جتا هـ}^{٢} = ٢٥ – ٤

∴ { ٣جا هـ – ٤ جتا هـ}^{٢} = ٢١

∴ ٣جا هـ – ٤ جتا هـ = √٢١



إذا كانت :

ٲ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ع $\in$ ص$^{+}$ ، وكان : $\frac{\text{ٲ}}{\text{د}} = \frac{\text{ب}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{و}}$

فاثبت أن : $\sqrt{\text{ٲ د}} + \sqrt{\text{ب جـ}} + \sqrt{\text{ٲ د}} = \sqrt{(\text{ٲ} + \text{ب} + \text{جـ})(\text{د} + \text{هـ} + \text{ع})}$

[مسابقة –معهد ECC الأمريكي–٣ ابريل ٢٠٠٤م]



نفرض أن : س = $\frac{\text{ٲ}}{\text{د}} = \frac{\text{ب}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{و}}$

∴ ٲ = س د ، ب = س هـ ، جـ = س و

∴ $\sqrt{\text{ٲ د}} + \sqrt{\text{ب جـ}} + \sqrt{\text{ٲ د}} = \sqrt{\text{س د}^{2}} + \sqrt{\text{س هـ}^{2}} + \sqrt{\text{س و}^{2}}$

$= \text{د} \sqrt{\text{س}} + \text{هـ} \sqrt{\text{س}} + \text{و} \sqrt{\text{س}}$

$= \{\text{د} + \text{هـ} + \text{و}\} \sqrt{\text{س}}$ ----------------- (١)

، ∴ $\sqrt{(\text{ٲ} + \text{ب} + \text{جـ})(\text{د} + \text{هـ} + \text{و})} = \sqrt{(\text{س د} + \text{س هـ} + \text{س و})(\text{د} + \text{هـ} + \text{و})}$

$= \sqrt{\text{س} (\text{د} + \text{هـ} + \text{و})(\text{د} + \text{هـ} + \text{و})}$

$= \sqrt{\text{س} (\text{د} + \text{هـ} + \text{و})^{2}}$

$= \{\text{د} + \text{هـ} + \text{و}\} \sqrt{\text{س}}$ -------------------------- (٢)

من (١)، (٢) ينتج المطلوب



٣١

على الشكل :

(م ، نو)،(ں ، نو) دائرتان متطابقتان

مرسومتان داخل المثلث ٩ ب جـ القائم في زاوية ب ،

وتمسان أضلاع المثلث في النقاط : هـ و ك ع

رسم م ں فقطع الدائرتين في س ، ص

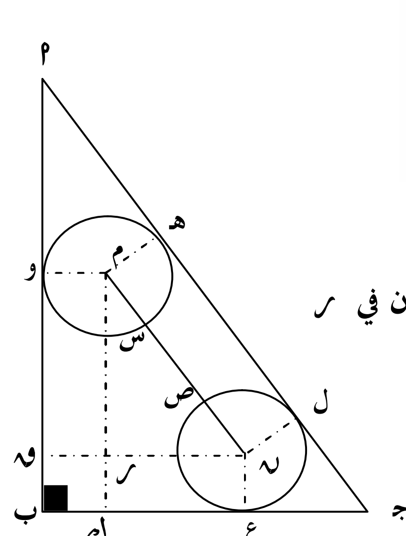
بحيث: | م س |=| س ص |=| ص ں |

فإذا كان : | ٩ ب|= ٦سم ، | ب جـ|=٨سم

فاوجد : طول نو

[المصدر : مسابقة المدارس الثانوية بولاية أوهايو الأمريكية–٢٠٠٥م]





§ نصل : م هـ ، م و ، ں ل ، ں ع

§ نسقط : ں ى ⊥ ٩ ب ، م ك ⊥ جـ ب يتقاطعان في ر

∵ | ں ل | = | م هـ | = نو

، ∵ ں ل ⊥ ٩ جـ ، م هـ ⊥ ٩ جـ

∴ الشكل : ں ل هـ م مستطيل

، ∵ | م س |=| س ص |=| ص ں |

∴ | هـ ل | = ٣ نو

∵ جا ٩ = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ، جا ∠ ں م ر = $\frac{\text{م ر}}{\text{٣ نو}}$

من تشابه △ △ : ٩ جـ ب ، م ں ر

∴ جا ٩ = جا ∠ ں م ر

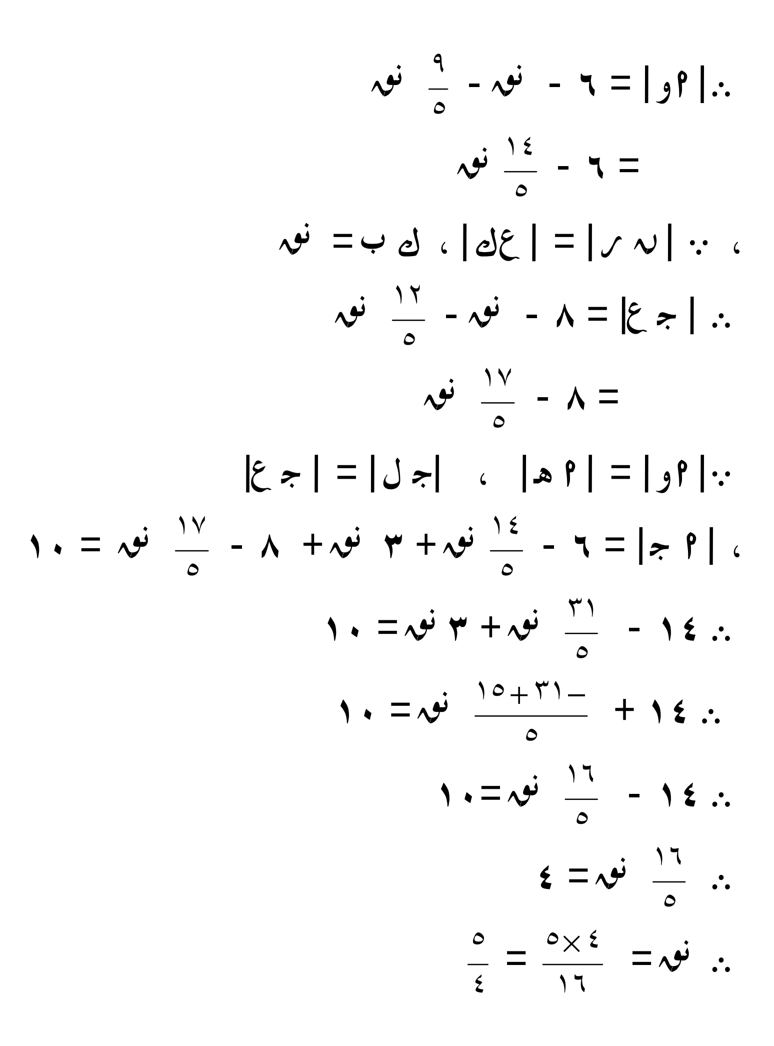
∴ $\frac{\text{م ر}}{\text{٣ نو}} = \frac{٣}{٥}$

∴ م ر = $\frac{٩}{٥}$ نو

وبالمثل : ں ر = $\frac{١٢}{٥}$ نو

∵ | م ر | = | و ى | ، ى ب = نو





∴ |أ و| = ٦ - ن - ٩/٥ ن

= ٦ - ١٤/٥ ن

، ∵ |ن ر| = |ع ك| ، ك ب = ن

∴ |جـ ع| = ٨ - ن - ١٢/٥ ن

= ٨ - ١٧/٥ ن

∵ |أ و| = |أ هـ| ، |جـ ل| = |جـ ع|

، |أ جـ| = ٦ - ١٤/٥ ن + ٣ ن + ٨ - ١٧/٥ ن = ١٠

∴ ١٤ - ٣١/٥ ن + ٣ ن = ١٠

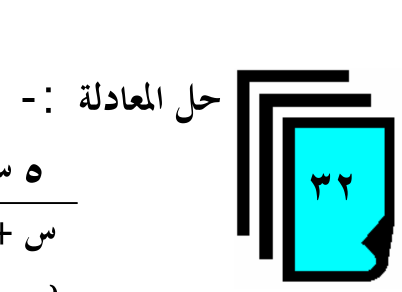
∴ ١٤ + (-٣١ + ١٥)/٥ ن = ١٠

∴ ١٤ - ١٦/٥ ن = ١٠

∴ ١٦/٥ ن = ٤

∴ ن = (٤ × ٥)/١٦ = ٥/٤





حل المعادلة :-

$$\frac{٥\ س}{س + ٣} + \frac{س + ٢}{س} - \frac{٦}{س^{٢} + ٣\ س} = ٥$$

حيث س ∉ { -٣ ، ٠ }

[المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية–٤مارس ٢٠٠٤]



$$\frac{٥}{س + ٣} + \frac{س + ٢}{س} - \frac{٦}{س \{ س + ٣ \}} = \frac{٥\ س^{٢} + \{ س + ٢ \}\{ س + ٣ \} - ٦}{س \{ س + ٣ \}} = ٥$$

$٥\ س^{٢} + \{ س + ٢ \}\{ س + ٣ \} - ٦ = ٥\ س \{ س + ٣ \}$

$٥\ س^{٢} + س^{٢} + ٥ س + ٦ - ٦ = ٥\ س^{٢} + ١٥\ س$

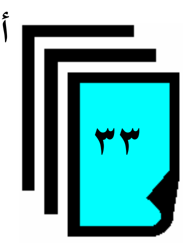
$٦\ س^{٢} + ٥ س = ٥\ س^{٢} + ١٥\ س$

$س^{٢} - ١٠\ س =$ صفر

$س \{ س - ١٠ \} =$ صفر

إما س= صفر (مرفوض)

∴ س = ١٠.



أوجد جميع حلول (س ، ص ، ع) الصحيحة الموجبة التي تحقق النظام

س^{٢} + ص − ع = ١٠٠
س + ص^{٢} − ع = ١٢٤


[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –٢٢ فبراير ٢٠٠٦ م]

الحل

نفرض أن : س^{٢} + ص − ع = ١٠٠ ------------- (١)

س + ص^{٢} − ع = ١٢٤ ------------- (٢)

بالطرح ∴ س + ص^{٢} - س^{٢} - ص = ٢٤

∴ {ص^{٢} - س^{٢} }- {ص + س} = ٢٤

∴ {ص - س} {ص + س} - {ص - س} = ٢٤

∴{ص - س} [{ص + س} - ١] = ٢٤

∴{ص - س} {ص + س - ١ } = ٢٤

نلاحظ أن :

{ص - س} {ص + س} إما عددان زوجيان معا أو عددان فرديان معا وبالتالي العددان {ص - س} {ص + س - ١} عددان أحدهما فردي والآخر زوجي .

وكذلك نلاحظ أن :

{ص + س - ١}>{ص - س}

وبالتالي :

التحليل الممكن للعدد ٢٤ هو (٣ ، ٨) أو (١ ، ٢٤)

وعلى ذلك :-

ص − س = ٣ ، ص + س - ١ =٨ ومنها س = ٣ ، ص = ٦ --------- (٣)

أو :-

ص − س = ١ ، ص + س - ١ =٢٤ ومنها س =١٢ ، ص =١٣ --------- (٤)



بالتعويض من (٣) في (١)

∴ ع= - ٨٥

∴(س ، ص ، ع) = (٣ ، ٦ ، -٨٥) --- (مرفوض)

بالتعويض من (٤) في (١)

∴ ع= ٥٧

∴ (س ، ص ، ع) = (١٢، ١٣، ٥٧)

وهي الإجابة الوحيدة الممكنة.

٣٤

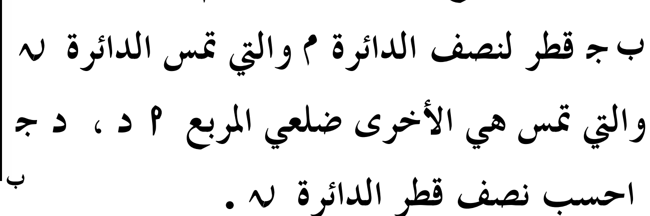
علي الشكل:

ﻫ ب ج د مربع طول ضلعه ٢ سم ،

ب ج قطر لنصف الدائرة م والتي تمس الدائرة ن

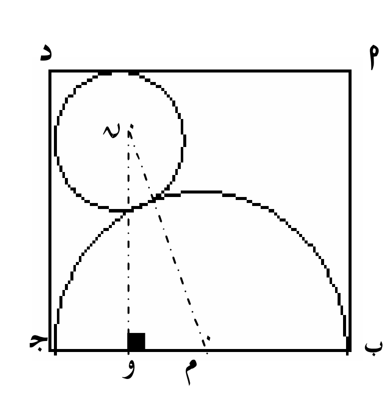
والتي تمس هي الأخرى ضلعي المربع ﻫ د ، د ج

احسب نصف قطر الدائرة ن .



[المصدر : مسابقة ولاية وسكنسون الأمريكية - التصفية الأولى – أكتوبر ٢٠٠٥م]





نصل : م ن ، نسقط : ن و ⊥ ب ج

نفرض أن نصف قطر الدائرة ن = نق

∵ م منتصف ب ج ، ∵ |ب ج| = ٢سم

∴ نصف قطر الدائرة م = ١ سم

∴ |م ن| = ١ + نق

∵ |ن و| = |د ج| - نق = ٢ - نق

، ∵|و م| = ١ - نق

في △ م ن و القائم في زاوية و

∴ {١ + نق}^{٢} = {٢ - نق}^{٢} + {١ - نق}^{٢}

∴ ١ + ٢ نق + نق^{٢} = ٤ – ٤نق + نق^{٢} + ١ - ٢ نق + نق^{٢}

∴ نق^{٢} - ٨ نق + ٤ = صفر

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية في مجهول واحد

نق = ٤ ± ٢ √٣

∵ √٣ > ١ ومنها : نق = ٤ + ٢ √٣

∴ نق > ٦ (وهذا مستحيل)

∴ نق = ٤ - ٢ √٣





أوجد مجموعة حل المعادلة (حيث س ∈ :) :-

$$٢٧^{س} - ٩^{س - ١} - ٣^{س + ١} + \frac{١}{٣} = \text{صفر}$$

[المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية– ٩ مارس ٢٠٠٦م]



$$٢٧^{س} - ٩^{س - ١} - ٣^{س + ١} + \frac{١}{٣} = \text{صفر}$$

$$٣^{٣س} - ٣^{٢س} \times ٣^{-٢} - ٣^{س} \times ٣ + \frac{١}{٣} = \text{صفر}$$

$$٣^{٣س} - \frac{١}{٩} \times ٣^{٢س} - ٣^{س} \times ٣ + \frac{١}{٣} = \text{صفر}$$

نفرض أن : $٣^{س} = ص$

$\therefore$ $ص^{٣} - \frac{١}{٩} ص^{٢} - ٣ ص + \frac{١}{٣} = \text{صفر}$

$\therefore$ $\{ص^{٣} - \frac{١}{٩} ص^{٢}\} - \{٣ ص - \frac{١}{٣}\} = \text{صفر}$

$\therefore$ $ص^{٢} \{ ص - \frac{١}{٩}\} - ٣ \{ ص - \frac{١}{٩}\} = \text{صفر}$

$\therefore$ $\{ص^{٢} - ٣\} \{ ص - \frac{١}{٩}\} = \text{صفر}$

$\therefore$ $ص^{٢} - ٣ = \text{صفر}$ ، ومنها : $ص = \sqrt{٣}$

$\therefore$ $٣^{س} = \sqrt{٣}$

$\therefore$ $٣^{س} = ٣^{\frac{١}{٢}}$ ومنها : $س = \frac{١}{٢}$

$ص - \frac{١}{٩} = \text{صفر}$

$\therefore$ $ص = \frac{١}{٩}$

$\therefore$ $٣^{س} = ٣^{-٢}$

$\therefore$ $س = -٢$ $\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{\frac{١}{٢}، -٢\}$.



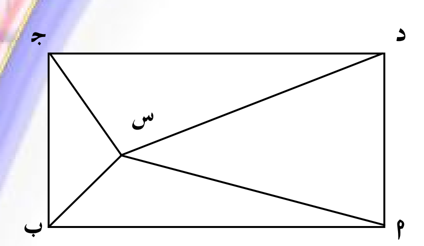
إذا كانت :

س نقطة تقع داخل المستطيل ٩ ب جـ د

بحيث أن :-

|٩ س| = ٩ سم ، |ب س| = ٤ سم ،

|جـ س| = ٦سم ، أوجد :|جـ د|.

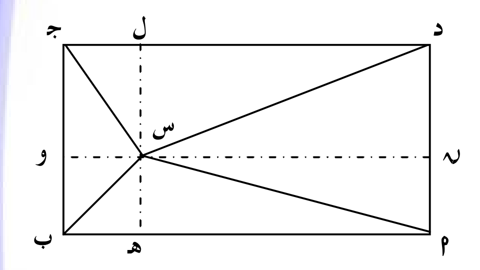


[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –٢٣فبراير ٢٠٠٥ م]



نرسم : $\overleftrightarrow{\text{نو}}$ ⊥ ٩ د ، ب جـ

، نرسم : $\overleftrightarrow{\text{ل هـ}}$ ⊥ د جـ ، ٩ ب



في △ د س ل القائم في ∠ ل

|س د|^{٢} = |دل|^{٢}+|ل س|^{٢}

= |٩ هـ|^{٢}+|جو|^{٢} -------------- (١)

في △ ٩ س هـ القائم في ∠ هـ

|٩ هـ|^{٢}= ٨١ - |س هـ|^{٢} -------------- (٢)

في △ س جـ و القائم في ∠ و

|جو|^{٢}= ٣٦ - |هـ ب|^{٢} -------------- (٣)

بالتعويض من (٢) ، (٣) في (١)

∴ |س د|^{٢} = [٨١ - |س هـ|^{٢}] + [٣٦ - |هـ ب|^{٢}]

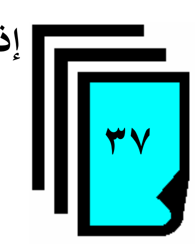
= ٨١ + ٣٦ – [|س هـ|^{٢}+ |هـ ب|^{٢}]

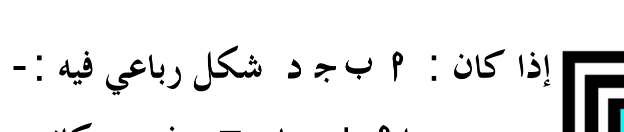
= ٨١ + ٣٦ – ١٦

= ١٠١

|س د| = $\sqrt{١٠١}$ سم







إذا كان : ٯ ب جـ د شكل رباعي فيه :-

جتا ٯ + جتا جـ = صفر ، وكانت ∠ ب حادة ،

أوجد قيمة : $\frac{\text{ظا ب}}{\text{ظا د}}$

[دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية الجولة السادسة -٢٠٠٦م]



∵ جتا ٯ + جتا جـ = صفر

∴ جتا ٯ = - جتا جـ

∴ ∠ ٯ ، ∠ جـ متكاملتان

، ∵ ٯ ب جـ د شكل رباعي

∴ ∠ ب ، ∠ د متكاملتان

∴ ظا ب = - ظا د

∴ $\frac{\text{ظا ب}}{\text{ظا د}}$ = -١





٣٨

على الشكل :

أ ب جـ Δ متطابق الأضلاع ،

طول ضلعه ٤ سم وفيه هـ د ⊥ ب جـ

وكذلك فيه : $\frac{\text{مساحة المثلث هـ جـ د}}{\text{مساحة الرباعي أ هـ د ب}} = \frac{1}{3}$

أوجد : |هـ د|

[دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية الجولة الثانية-٢٠٠٦م]



∵ أ ب جـ Δ متطابق الأضلاع

∴ قياس زاويته = ٦٠°

نفرض أن : |جـ د| = س

∴ |د هـ| = س $\sqrt{3}$ سم

∴ مساحة سطح Δ هـ جـ د = $\frac{1}{2}$ × س × س $\sqrt{3}$ = $\frac{\text{س}^2\sqrt{3}}{2}$ سم²

، مساحة سطح Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٤ × جا ٦٠ = ٤ $\sqrt{3}$ سم²

∵ $\frac{\text{مساحة المثلث هـ جـ د}}{\text{مساحة الرباعي أ هـ د ب}} = \frac{1}{3}$

∴ $\frac{\text{مساحة المثلث هـ جـ د}}{\text{مساحة المثلث أ ب جـ}} = \frac{1}{4}$

∴ $\frac{\frac{\text{س}^2\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$

∴ ٢ س² $\sqrt{3}$ = ٤ $\sqrt{3}$ ∴ س² = ٢

∴ س = $\sqrt{2}$

∵ |هـ د| = س $\sqrt{3}$ سم

∴ |هـ د| = $\sqrt{2}$ × $\sqrt{3}$ = $\sqrt{6}$ سم





اثبت أن مميز المعادلة :

أ س@ + ب س + ج = صفر لا يساوي ٩٩

حيث : أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، ج ∈ ص

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –٢٣فبراير ٢٠٠٠م]



مميز المعادلة : أ س@ + ب س + ج = صفر هو : ب^{٢} – ٤ أ ج

نفرض أن : ب^{٢} – ٤ أ ج = ٩٩

نلاحظ أن : ب لا يمكن أن يكون عدداً زوجياً

أي أن : ب عدداً فرديا

∴ يمكن وضع العدد ب على الصورة : ب = ٢ ن +١ (حيث ∈ ص)

∴ { ٢ ن +١}^{٢} – ٤ أ ج = ٩٩

∴ ٤ ن^{٢} +٤ ن+١ - ٤ أ ج = ٩٩

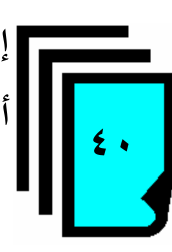
∴ ٤ ن^{٢} +٤ ن - ٤ أ ج = ٩٨

∴ ٤ {ن^{٢} + ن - أ ج) = ٩٨

، ∵ ٤ ليست من عوامل العدد ٩٨

∴ ب^{٢} – ٤ أ ج = ٩٩ (علاقة مستحيلة)



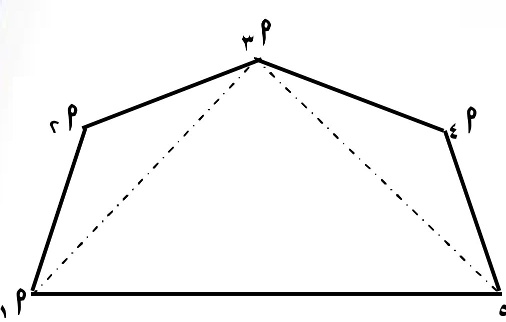


إذا كان طول ضلع المضلع المنتظم $أ_١ أ_٢ أ_٣ .... أ_{١٢}$ يساوي ٢ سم

أوجد مساحة سطح الشكل الخماسي $أ_١ أ_٢ أ_٣ أ_٤ أ_٥$

[دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية - جولة الفرق -٢٠٠٦م]





∵ قياس زاوية المضلع ذو الإثنى عشر وجه الداخلية

$$= \frac{(١٢-٢)\times١٨٠}{١٢} = \frac{١٠\times١٨٠}{١٢} = ١٥٠^\circ$$

∴ في $\triangle$ $أ_١ أ_٢ أ_٣$

قياس $\angle أ_٢ = ١٥٠^\circ$

∵ $|أ_١ أ_٢| = |أ_٢ أ_٣| = ٢$ سم

∴ مساحة سطح $\triangle$ $أ_١ أ_٢ أ_٣ = \frac{١}{٢} \times ٢ \times ٢ \times$ جا ١٥٠

$= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$ سم^٢

بالمثل مساحة سطح $\triangle$ $أ_٣ أ_٤ أ_٥ = ١$ سم^٢

∵ قياس $\angle أ_٤ أ_٣ أ_٥$ = قياس $\angle أ_٢ أ_٣ أ_١ = ١٥^\circ$

∴ قياس $\angle أ_٥ أ_٣ أ_١ = ١٥٠^\circ - (١٥^\circ + ١٥^\circ) = ١٢٠^\circ$

∵ $|أ_٥ أ_٣| = |أ_٣ أ_١|$

باستخدام نظرية الزاوية المنفرجة في $\triangle$ $أ_١ أ_٢ أ_٣$

∴ $|أ_٣ أ_١|^٢ = |أ_٢ أ_٣|^٢ + |أ_١ أ_٢|^٢ - ٢ \times |أ_٢ أ_٣| \, |أ_١ أ_٢|$ جتا ١٥٠

$$= ٤ + ٤ - ٢ \times ٢ \times ٢ \times (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = ٨ + ٤\sqrt{٣}$$

∴ مساحة سطح $\triangle$ $أ_٥ أ_٣ أ_١ = \frac{١}{٢} \{٨ + ٤\sqrt{٣}\}$ جا١٢٠

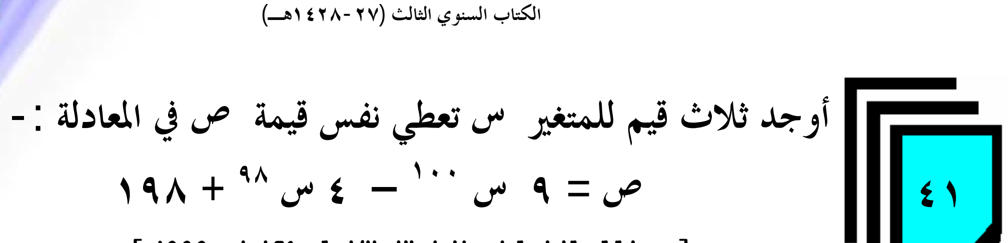
$$= \frac{١}{٢} \{٨ + ٤\sqrt{٣}\} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

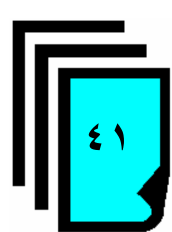
$$= \{٢ + \sqrt{٣}\} \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣} + ٣$$

∴ مساحة سطح الشكل الخماسي $أ_١ أ_٢ أ_٣ أ_٤ أ_٥ = ٢\sqrt{٣} + ٣ + ١ + ١$

$$= ٢\sqrt{٣} + ٥ \text{ سم}^٢$$







أوجد ثلاث قيم للمتغير س تعطي نفس قيمة ص في المعادلة :-

$ص = ٩ س^{١٠٠} - ٤ س^{٩٨} + ١٩٨$

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية -٢٤فبراير ١٩٩٩م]



$ص = س^{٩٨} \{ ٩س^{٢} - ٤ \} + ١٩٨$

$ص = س^{٩٨} \{ ٣س + ٢\} \{ ٣س - ٢ \} + ١٩٨$

- إذا كانت : س = صفر

فإن ص = ١٩٨

- إذا كانت : $س = -\frac{٢}{٣}$

فإن ص= ١٩٨

- إذا كانت : $س = \frac{٢}{٣}$

فإن ص= ١٩٨

∴ قيم س= $\{$ صفر ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ $\}$ تعطي نفس القيمة للمتغير ص =١٩٨





أوجد قيم الأعداد الحقيقية أ، ب، ج والتي تحقق العلاقة :-

$$\frac{١}{س\,(س-٣)(س+١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-٣} + \frac{ج}{س+١}$$

حيث $س \neq ٠ ، ٣ ، -١$

[المصدر : مسابقة ولاية نيو ميكسيكو الأمريكية ١٣ نوفمبر ٢٠٠٤م]



$$\because \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-٣} + \frac{ج}{س+١} = \frac{أ(س-٣)(س+١) + ب \times س(س+١) + ج \times س(س-٣)}{س(س-٣)(س+١)}$$

$$\therefore \frac{١}{س(س-٣)(س+١)} = \frac{أ(س-٣)(س+١) + ب \times س(س+١) + ج \times س(س-٣)}{س(س-٣)(س+١)}$$

$$\therefore أ(س-٣)(س+١) + ب \times س(س+١) + ج \times س(س-٣) = ١$$

$$\therefore أ\{س^{٢} - ٢س - ٣\} + ب\{س^{٢} + س\} + ج\{س^{٢} + ٣س\} = ١$$

$$\therefore أس^{٢} - ٢أس - ٣أ + بس^{٢} + بس + جس^{٢} + ٣جس = ١$$

$$\therefore \{أ + ب + ج\}س^{٢} + \{-٢أ + ب - ٣ج\}س - ٣أ = ١$$

نستطيع كتابة العلاقة السابقة كالتالي:-

$$\{أ + ب + ج\}س^{٢} + \{-٢أ + ب - ٣ج\}س - ٣أ = صفر\,س^{٢} + صفر\,س + ١$$

بمساواة المعاملات .

$\therefore أ + ب + ج = صفر$ ------------------ (١)

، $-٢أ + ب - ٣ج = صفر$ ------------------ (٢)

، $-٣أ = ١$ ومنها $أ = -\frac{١}{٣}$

بالتعويض عن قيمة : أ في (١) ، (٢)

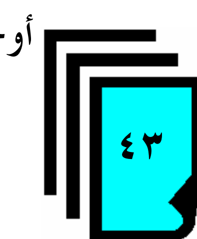
$\therefore ب + ج = \frac{١}{٣}$ ، $ب - ٣ج = -\frac{٢}{٣}$ (بالطرح)

$\therefore ٤ج = ١$ ومنها: $ج = \frac{١}{٤}$

$\therefore ب = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٢}$







أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية :-

§ $\text{لو}_{\frac{١}{٨}}\left(\text{لو}_{\frac{١}{٤}}\left(\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\text{س}\right)\right)=\frac{١}{٣}$

§ $\text{لو}_{٣}\text{س}+\text{لو}_{٩}\text{س}+\text{لو}_{٢٧}\text{س}=١١$

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –٢٤فبراير ١٩٩٩م]



§ $\text{لو}_{\frac{١}{٨}}\left(\text{لو}_{\frac{١}{٤}}\left(\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\text{س}\right)\right)=\frac{١}{٣}$

$\text{لو}_{\frac{١}{٤}}\left(\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\text{س}\right)=\left(\frac{١}{٨}\right)^{\frac{١}{٣}}$

$\text{لو}_{\frac{١}{٤}}\left(\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\text{س}\right)=\left(٢^{-٣}\right)^{\frac{١}{٣}}=٢^{-١}$

$\text{لو}_{\frac{١}{٤}}\left(\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\text{س}\right)=\frac{١}{٢}$

$\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\text{س}=\left(\frac{١}{٤}\right)^{\frac{١}{٢}}=\left(٢^{-٢}\right)^{\frac{١}{٢}}=\left(٢\right)^{-١}=\frac{١}{٢}$

$\therefore \text{س}=\left(\frac{١}{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \text{س}=\frac{١}{\sqrt{٢}}$

§ $لو_{٣}\,س + لو_{٩}\,س + لو_{٢٧}\,س = ١١$

$\frac{١}{لو_{س}\,٣} + \frac{١}{لو_{س}\,٩} + \frac{١}{لو_{س}\,٢٧} = ١١$

$\frac{١}{لو_{س}\,٣} + \frac{١}{لو_{س}\,٣^{٢}} + \frac{١}{لو_{س}\,٣^{٣}} = ١١$

$\frac{١}{لو_{س}\,٣} + \frac{١}{٢لو_{س}\,٣} + \frac{١}{٣لو_{س}\,٣} = ١١$ (بالضرب في : $٦\,لو_{س}\,٣$)

$٦ + ٣ + ٢ = ٦٦\,لو_{س}\,٣$

$١١ = ٦٦\,لو_{س}\,٣$

$٦\,لو_{س}\,٣ = ١$

$لو_{س}\,٣ = \frac{١}{٦}$

$س^{\frac{١}{٦}} = ٣$

$س = ٣^{٦} = ٧٢٩$



٤٤

علي الشكل:

النقطة م تقع داخل الشكل الرباعي أ ب جـ د

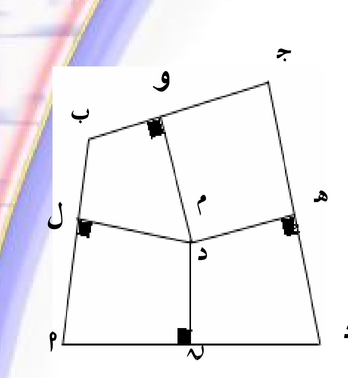
م ل ⊥ أ ب ، م و ⊥ ب جـ ، م هـ ⊥ جـ د ، م ن ⊥ أ د

، |أ ل| = ٢ سم ، |ل ب| = ٤ سم ،

|ب و| = ١ سم ، |و جـ| = ٣ سم ،

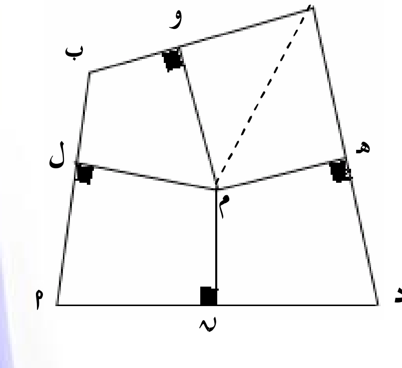
|هـ جـ| = ٦ سم ، |د هـ| = ٤ سم

أثبت أن : النقطة ن منتصف أ د .



[المصدر : مسابقة ولاية وسكنسون الأمريكية– التصفية الثالثة - ٢٠٠٤ - ٢٠٠٥م]





نصل : م جـ

في △△ م هـ جـ ، م و جـ القائما الزاوية

|جـ و|^2 + |و م|^2 = |م جـ|^2 = |م هـ|^2 + |هـ جـ|^2

∴ |جـ و|^2 - |هـ جـ|^2 = |م هـ|^2 - |و م|^2 ------- (١)

بالمثل إذا رسمنا م د

∴ |هـ د|^2 - |د ن|^2 = |م ن|^2 - |هـ م|^2 ------- (٢)

وكذلك إذا رسمنا أ م

∴ |أ ن|^2 - |أ ل|^2 = |ل م|^2 - |م ن|^2 ------- (٣)

وأيضا عند رسم م ب

∴ |ل م|^2 - |م و|^2 = |و ب|^2 - |ب ل|^2 ------- (٤)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣)، (٤)

∴ |جـ و|^2 - |هـ جـ|^2 + |هـ د|^2 - |د ن|^2 + |أ ن|^2 - |أ ل|^2 + |ل م|^2 - |م و|^2

= |م هـ|^2 - |و م|^2 + |م ن|^2 - |هـ م|^2 + |ل م|^2 - |م ن|^2 + |و ب|^2 - |ب ل|^2

∴ |جـ و|^2 - |هـ جـ|^2 + |هـ د|^2 - |د ن|^2 + |أ ن|^2 - |أ ل|^2 + |ل م|^2 - |م و|^2 - |م هـ|^2

+ |و م|^2 - |م ن|^2 + |هـ م|^2 - |ل م|^2 + |م ن|^2 - |و ب|^2 + |ب ل|^2 = صفر

∴ {|ل م|^2 - |ل م|^2} + {|و م|^2 - |م و|^2} + {|م ن|^2 - |م ن|^2}

+ {|هـ م|^2 - |هـ م|^2} + |جـ و|^2 - |هـ جـ|^2 + |هـ د|^2 - |د ن|^2 + |أ ن|^2 - |أ ل|^2



- |و ب|^2 + |ب ل|^2 = صفر

∴ |ج و|^2 - |هـ ج|^2 + |هـ د|^2 - |د ن|^2 + |م ن|^2 - |م ل|^2 - |و ب|^2 + |ب ل|^2 = صفر

∴ ٩ - ٣٦ + ١٦ - |د ن|^2 + |م ن|^2 - ٤ - ١ + ١٦ = صفر

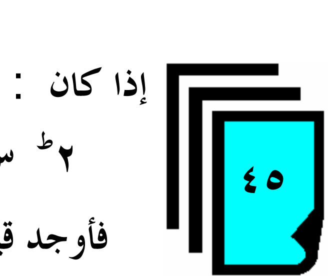
∴ ٤١ – ٤١ - |د ن|^2 + |م ن|^2 = صفر

∴ - |د ن|^2 + |م ن|^2 = صفر

∴ |د ن|^2 = |م ن|^2

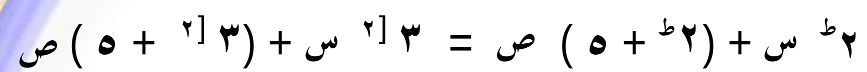
∴ |د ن| = |م ن|

∴ النقطة ن منتصف م د .



٤٥

إذا كان :



$٢^{ط}$ س + ($٢^{ط}$ + ٥) ص = ٣]٢ س + (٣]٢ + ٥) ص

فأوجد قيمة : $\frac{س}{ص}$

[دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية - الجولة الثانية-٢٠٠٤م]



نفرض أن : $٢^{ط}$ = ٩ ، ٣]٢ = ب

∴ ٩ س + { ٩ + ٥ } ص = ب س + { ب + ٥ } ص

∴ ٩ س + ٩ ص + ٥ ص = ب س + ب ص+ ٥ ص (بطرح ٥ص من الطرفين)

∴ ٩ س + ٩ ص = ب س + ب ص

∴ ٩ س - ب س = ب ص - ٩ ص

∴ س { ٩ - ب} = ص { ب - ٩ }

∴ $\frac{س}{ص} = - \frac{٩ - ب}{٩ - ب}$

∴ $\frac{س}{ص}$ = - ١

٤٦

على الشكل :

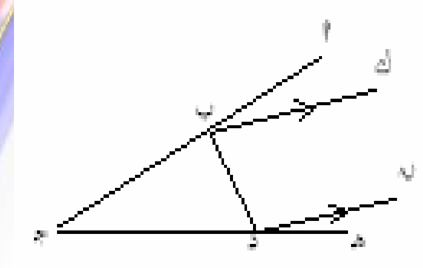
قياس ∠ أ ب ك = $\frac{١}{٦}$ قياس ∠ أ ب د

وقياس ∠ هـ د ن = $\frac{١}{٦}$ قياس ∠ ب د هـ



وكان ب ك] د ن

احسب قياس : ∠ ج



[دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية - جولة الفرق -٢٠٠٤م]



نفرض أن : قياس ∠ أ ب د = س

، قياس ∠ ب د هـ = ص

∵ قياس ∠ أ ب ك = $\frac{١}{٦}$ قياس ∠ أ ب د

∴ قياس ∠ ك ب د = $\frac{٥}{٦}$ س

وبالمثل : قياس ∠ ن د ب = $\frac{٥}{٦}$ ص

∵ ب ك] د ن

∴ قياس ∠ ك ب د + قياس ∠ ن د ب = ١٨٠ °

∴ $\frac{٥}{٦}$ س + $\frac{٥}{٦}$ ص = ١٨٠ °

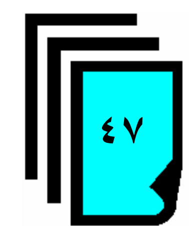
∴ $\frac{٥}{٦}$ {س + ص } = ١٨٠ °

∴ س + ص = ١٨٠ ° × $\frac{٨}{٥}$ = ٢١٦°

∴ قياس ∠ ج د ب + قياس ∠ ج ب د = ٣٦٠° - ٢١٦° = ١٤٤°

∴ قياس ∠ ج = ١٨٠ ° - ١٤٤° = ٣٦°





حل المعادلة :



$$٣^{٢+س} + ٣^{٢-س} = ٨٢$$

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –١٨فبراير ١٩٨٨م]



$$٣^{٢} \times ٣^{س} + ٣^{٢} \times ٣^{-س} = ٨٢$$

$$٩ \times ٣^{س} + ٩ \times ٣^{-س} = ٨٢$$

$$٩ \times ٣^{س} + \frac{٩}{٣^{س}} = ٨٢$$ (بالضرب في: $٣^{س}$)

$$٩ \times ٣^{س} \times ٣^{س} + ٩ - ٨٢ \times ٣^{س} = \text{صفر}$$

$$٩ \times \{٣^{س}\}^{٢} - ٨٢ \times ٣^{س} + ٩ = \text{صفر}$$

نفرض أن : $٣^{س} = ص$

∴ $٩ ص^{٢} - ٨٢ص + ٩ = \text{صفر}$

∴ $\{٩ص - ١\}\{ص - ٩\} = \text{صفر}$

∴ $٩ص - ١ = \text{صفر}$ ومنها $ص = \frac{١}{٩}$

∴ $٣^{س} = \frac{١}{٩}$

∴ $٣^{س} = ٣^{-٢}$ ومنها $س = -٢$

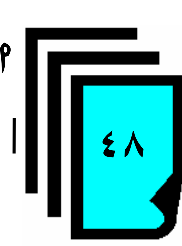
أو : $ص - ٩ = \text{صفر}$

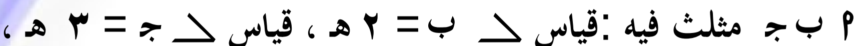
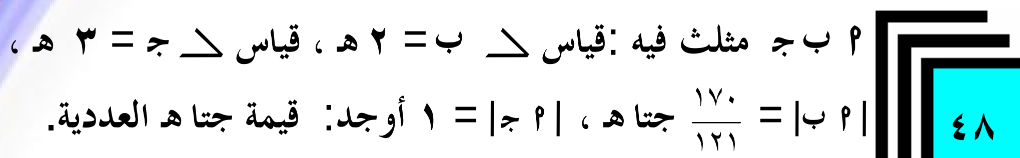
∴ $٣^{س} = ٩$

∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$ ومنها $س = ٢$

قيم س التي تحقق المعادلة = $\{٢ ، -٢\}$.





ﺃ ب ج مثلث فيه: قياس ∠ ب = ٢ هـ ، قياس ∠ ج = ٣ هـ ،

|ﺃ ب| = $\frac{١٧٠}{١٢١}$ جتا هـ ، |ﺃ ج| = ١ أوجد: قيمة جتا هـ العددية.

[دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية - جولة الفرق -٢٠٠٣م]



نفرض أن : الكسر= $\frac{١٧٠}{١٢١}$ = س

من قانون الجيب :-

∴ $\frac{\text{س جتا هـ}}{\text{جا ٣ هـ}} = \frac{١}{\text{جا ٢ هـ}}$

∴ س جتا هـ = $\frac{\text{جا ٣ هـ}}{\text{جا ٢ هـ}}$

∴ س جتا هـ = $\frac{\text{جا ٣ هـ}}{\text{٢جا هـ جتا هـ}}$ ---------------------(١)

(المثلث: الأضلاع $\frac{١٧٠}{١٢١}$ جتا هـ ، ١ ؛ الزوايا ٢ هـ ، ٣ هـ)

∵ جا ٣ هـ = جا (٢ هـ + هـ)

= جا ٢ هـ جتا هـ + جتا ٢ هـ جا هـ

= (٢جا هـ جتا هـ) جتا هـ + (جتا^{٢}هـ − جا^٢ هـ) جا هـ

= ٢جا هـ جتا^{٢}هـ + جا هـ جتا^{٢}هـ - جا^٣ هـ

= ٣جا هـ جتا^{٢}هـ - جا^٣ هـ

= ٣جا هـ (١ − جا^{٢}هـ)- جا^٣ هـ

= ٣جا هـ - ٣جا^{٣}هـ - جا^٣ هـ

جا ٣ هـ = ٣جا هـ - ٤جا^{٣}هـ

بالتعويض في (١)

∴ س جتا هـ = $\frac{\text{٣جا هـ - ٤جا}^٣\text{هـ}}{\text{٢جا هـ جتا هـ}} = \frac{\text{جا هـ (٣ - ٤جا}^٢\text{هـ)}}{\text{٢جا هـ جتا هـ}} = \frac{\text{٣ - ٤جا}^٢\text{هـ}}{\text{٢ جتا هـ}}$

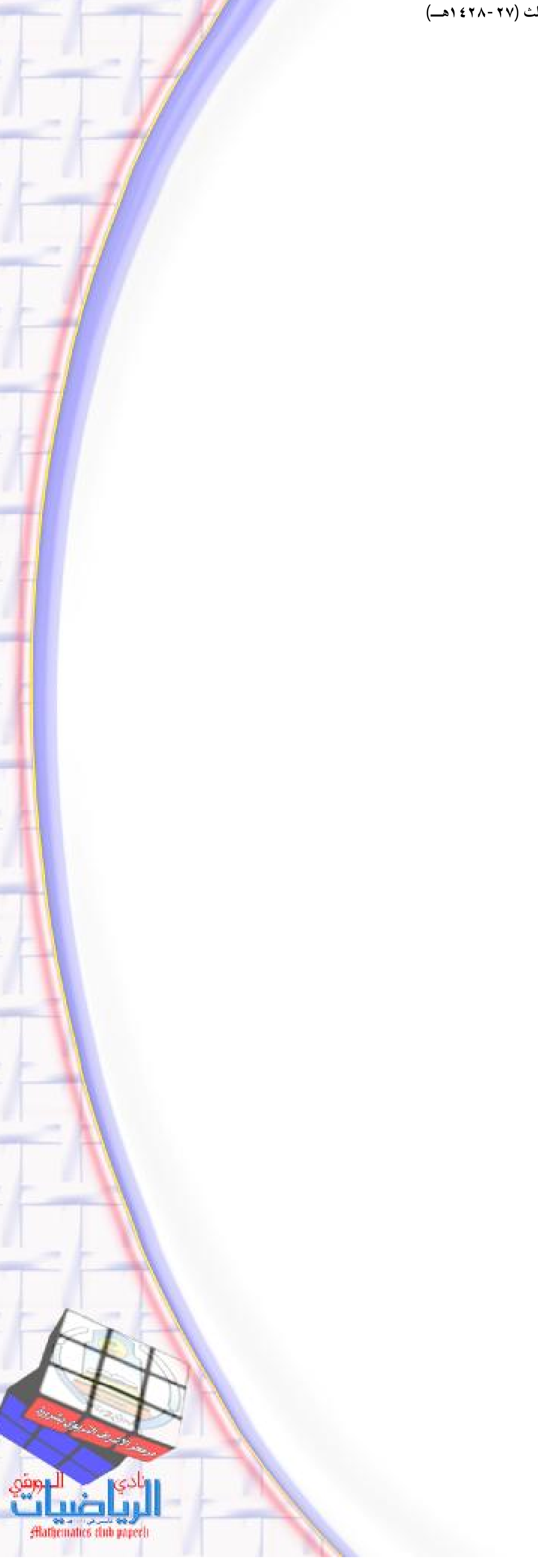
∴ ٢ س جتا^٢ هـ = ٣ - ٤جا^{٢}هـ

∴ ٢ س جتا^٢ هـ = ٣ − ٤ (١ - جتا^٢ هـ)

∴ ٢ س جتا^٢ هـ = ٣ − ٤ + ٤ جتا^٢ هـ

∴ ٢ س جتا^٢ هـ = -١ + ٤ جتا^٢ هـ





∴ ٤ جتا^{٢} هـ - ٢ س جتا^{٢} هـ = ١

∴ (٤ – ٢ س) جتا^{٢} هـ = ١

∴ جتا^{٢} هـ = ١ ÷ (٤ – ٢ س)

∴ جتا^{٢} هـ = $١ \div \left(٤ - ٢ \times \frac{١٧٠}{١٢١} \right)$

∴ جتا^{٢} هـ = $١ \div \left(٤ - \frac{٣٤٠}{١٢١} \right)$

∴ جتا^{٢} هـ = $١ \div \left(\frac{٤٨٤ - ٣٤٠}{١٢١} \right)$

∴ جتا^{٢} هـ = $١ \div \left(\frac{١٤٤}{١٢١} \right)$

∴ جتا^{٢} هـ = $\frac{١٢١}{١٤٤}$

∴ جتا هـ = $\frac{١١}{١٢}$



بفرض أن :

س ، ص زاويتين ، جا^{٢}س + جتا^{٢}ص = $\frac{٣}{٢}$ م ، جتا^{٢}س + جا^{٢}ص = $\frac{١}{٢}$ م^{٢}

أوجد جميع القيم الممكنة للعدد م

[المسابقات الكندية العامة – مسابقة معهد اقليدس - ١٩ ابريل ٢٠٠٦م]



جا^{٢}س + جتا^{٢}ص = $\frac{٣}{٢}$ م ------------------ (١)

جتا^{٢}س + جا^{٢}ص = $\frac{١}{٢}$ م^{٢} ------------------ (٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ جا^{٢}س + جتا^{٢}ص +جتا^{٢}س + جا^{٢}ص = $\frac{٣}{٢}$ م + $\frac{١}{٢}$ م^{٢}

∴ (جا^{٢}س +جتا^{٢}س)+ (جتا^{٢}ص + جا^{٢}ص) = $\frac{٣}{٢}$ م + $\frac{١}{٢}$ م^{٢}

∴ $\frac{٣}{٢}$ م + $\frac{١}{٢}$ م^{٢} = ٢ (بالضرب × ٢)

∴ ٣ م + م^{٢} = ٤

∴ م^{٢} + ٣ م – ٤ = صفر

∴ (م + ٤) (م – ١) = صفر

∴ م + ٤ = صفر

∴ م = - ٤ (مستحيلة : لأن جا^{٢}س + جتا^{٢}ص = $\frac{٣}{٢}$ × - ٤ = قيمة سالبة)

أو : م - ١ = صفر

∴ م = ١ (هي الإجابة الممكنة).



٥٠

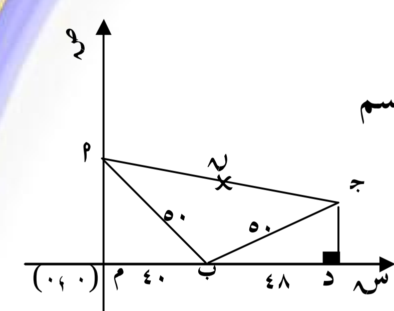
على الشكل :

جـ د ⊥ محور سـ ، | ٩ ب| = | ب جـ| = ٥٠سم

، | ب د | = ٤٨سم ، | م ب| = ٤٠ سم ،

ﻫ منتصف ٩ جـ.

أوجد : احداثيا نقطة ﻫ



[المسابقات الكندية العامة – مسابقة معهد اقليدس - ١٩ ابريل ٢٠٠٥م]



في △ ٩ ب م

∴| ٩ م|^{٢} = {٥٠}^{٢} - {٤٠}^{٢}

= ٢٥٠٠- ١٦٠٠

= ٩٠٠

∴ | ٩ م|= ٣٠

بالمثل في : △ جـ ب د

∴| جـ د|^{٢} = {٥٠}^{٢} - {٤٨}^{٢}

∴ | جـ د|=١٤

∴ إحداثيا النقطة جـ = (٤٨ + ٤٠ ، ١٤) = (٨٨، ١٤)

، إحداثيا النقطة ٩ = (٠ ، ٣٠)

∴ إحداثيا النقطة ﻫ = $\left(\frac{٨٨+٠}{٢} , \frac{١٤+٣٠}{٢} \right)$

= (٤٤ ، ٢٢).



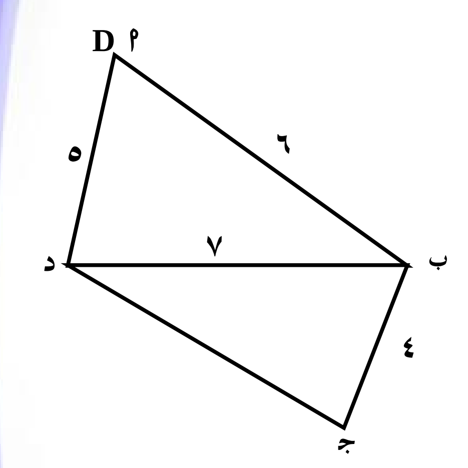
٥١

ﻫ ب جـ د شكل رباعي فيه:

قياس ∠ ﻫ + قياس ∠ جـ = ١٨٠، | ﻫ ب| = ٦سم، | ﻫ د| = ٥ سم ، | ب جـ| = ٤سم ، | ب د| = ٧ سم . أوجد | جـ د|

[المسابقات الكندية العامة – مسابقة معهد اقليدس- ١٩ ابريل ٢٠٠٥م]





باستخدام قانون جيب تمام الزاوية في △ ﻫ ب د

∴ | ب د|^2 = | ﻫ د|^2 + | ﻫ ب|^2 - ٢ | ﻫ ب| | ﻫ د| جتا ﻫ

∴ ٤٩ = ٢٥ + ٣٦ – ٢ × ٥ × ٦ × جتا ﻫ

∴ ٤٩ = ٦١ – ٦٠ جتا ﻫ

∴ جتا ﻫ = $\frac{٦١ - ٤٩}{٦٠} = \frac{١٢}{٦٠} = \frac{١}{٥}$

∵ ∠ ﻫ + ∠ جـ = ١٨٠°

∴ ∠ جـ = ١٨٠° - ∠ ﻫ

∴ جتا جـ = جتا (١٨٠° - ﻫ)

∴ جتا جـ = - جتا ﻫ

∴ جتا جـ = - $\frac{١}{٥}$

بتطبيق قانون جيب تمام الزاوية مرة أخرى على △ ب جـ د

∴ | ب د|^2 = | ب جـ|^2 + | جـ د|^2 - ٢ | ب جـ | | جـ د| جتا جـ

∴ ٤٩ = ١٦ + | جـ د|^2 – ٢ × ٤ | جـ د| × - $\frac{١}{٥}$

∴ ٤٩ = ١٦ + | جـ د|^2 + $\frac{٨}{٥}$ | جـ د|

∴ | جـ د|^2 + $\frac{٨}{٥}$ | جـ د| - ٣٣ = صفر (بالضرب × ٥)

∴ ٥ | جـ د|^2 + ٨ | جـ د| – ١٦٥ = صفر

∴ [٥ | جـ د| + ٣٣] [| جـ د| - ٥] = صفر

∴ | جـ د| = − $\frac{٣٣}{٥}$ (مرفوض)

∴| جـ د| = ٥ سم



٥٢

على الشكل :

أ ب ، ب ج وتران في دائرة ، بحيث أ ب < ب ج

إذا كانت د نقطة على الدائرة بحيث أ د ⊥ ب ج ،



وكان دو] ب ج.

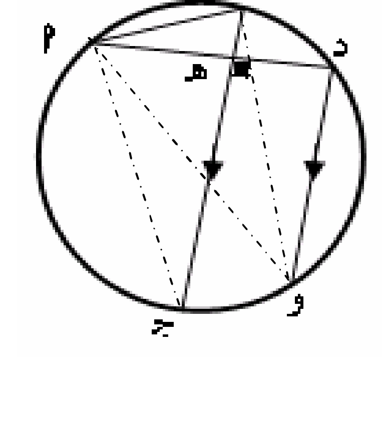


اثبت أن :

قياس ∠ و أ ج + قياس ∠ أ ب ج = ٩٠°

[المسابقات الكندية العامة – مسابقة معهد اقليدس- ١٩ ابريل ٢٠٠٦م]







نصل كل من : أ ج ، أو ، ب و

∵ أ د ⊥ ب ج

∴ قياس ∠ أ هـ ج = ٩٠°

∵ دو] ب ج .

∴ قياس ∠ أ د و (المحيطية) = ٩٠°

∴ أو قطر في الدائرة

∵ ∠ و أ ج = ∠ و ب ج (محيطيتان مشتركتان في وج⌒) ------------ (١)

، ∵ قياس ∠ و ب أ = ٩٠° (محيطية مرسومة ف ينصف دائرة)

∴ قياس ∠ و ب ج + قياس ∠ أ ب ج = = ٩٠° ------------ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ قياس ∠ و أ ج + قياس ∠ أ ب ج = ٩٠°





أوجد قيمة : (أ) $\frac{١}{٦}+\frac{١}{١٢}+\frac{١}{٢٠}+\frac{١}{٣٠}+\frac{١}{٤٢}+\frac{١}{٥٦}+\frac{١}{٧٢}+\frac{١}{٩٠}=$

(ب) $\sqrt{٤+\sqrt{٧}} + \sqrt{٤-\sqrt{٧}}$

[الأولمبياد الأول للرياضيات – المملكة العربية السعودية – التصفية الأولى - ٢٠٠٦م]



(أ) $\frac{١}{٦}+\frac{١}{١٢}+\frac{١}{٢٠}+\frac{١}{٣٠}+\frac{١}{٤٢}+\frac{١}{٥٦}+\frac{١}{٧٢}+\frac{١}{٩٠}$

$=\left(\frac{١}{٢}-\frac{١}{٣}\right)+\left(\frac{١}{٣}-\frac{١}{٤}\right)+\left(\frac{١}{٤}-\frac{١}{٥}\right)+\left(\frac{١}{٥}-\frac{١}{٦}\right)+\left(\frac{١}{٦}-\frac{١}{٧}\right)+\left(\frac{١}{٧}-\frac{١}{٨}\right)+\left(\frac{١}{٨}-\frac{١}{٩}\right)+\left(\frac{١}{٩}-\frac{١}{١٠}\right)$

$=\frac{١}{٢}-\frac{١}{٣}+\frac{١}{٣}-\frac{١}{٤}+\frac{١}{٤}-\frac{١}{٥}+\frac{١}{٥}-\frac{١}{٦}+\frac{١}{٦}-\frac{١}{٧}+\frac{١}{٧}-\frac{١}{٨}+\frac{١}{٨}-\frac{١}{٩}+\frac{١}{٩}-\frac{١}{١٠}$

$=\frac{١}{٢}-\frac{١}{١٠}=\frac{٢}{٥}$

{ب} $\sqrt{٤+\sqrt{٧}} + \sqrt{٤-\sqrt{٧}}$

نفرض أن $س = \sqrt{٤+\sqrt{٧}}$

$\therefore س^٢ = ٤ + \sqrt{٧}$ ----------- (١)

ونفرض كذلك أن : $ص = \sqrt{٤-\sqrt{٧}}$

$\therefore ص^٢ = ٤ - \sqrt{٧}$

ونفرض أن : $ع = س + ص$ ----------- (٢)

$\therefore ع^٢ = س^٢ + ص^٢ + ٢س ص$ ---------- (٣)

بالتعويض : من (١) ، (٢) في (٣)

$\therefore ع^٢ = ٤ + \sqrt{٧} + ٤ - \sqrt{٧} + ٢ \{\sqrt{٤+\sqrt{٧}}\ \sqrt{٤-\sqrt{٧}}\}$

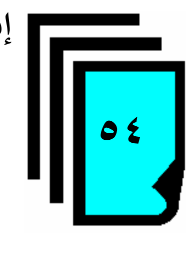
$\therefore ع^٢ = ٨ + ٢ \{\sqrt{\{٤+\sqrt{٧}\}\{٤-\sqrt{٧}\}}\}$

$\therefore ع^٢ = ٨ + ٢ \sqrt{٩}$

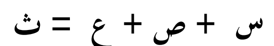
$ع^٢ = ٨ + ٢ \times ٣ = ١٤$

$ع = \sqrt{١٤}$.





إذا كان : س ، ص ، ع أعداداً حقيقية ≠ الصفر وتحقق نظام المعادلات

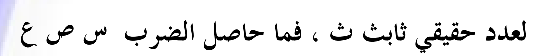


$$\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = \text{ث}$$

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢} = \text{ث}^{٢} - ٤$$

$$\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}} + \frac{١}{\text{ع}} = \frac{١}{٦٠}$$

لعدد حقيقي ثابت ث ، فما حاصل الضرب س ص ع



[الأولمبياد الأول للرياضيات – المملكة العربية السعودية – التصفية الأولى - ٢٠٠٦م]



$$\because \frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}} + \frac{١}{\text{ع}} = \frac{\text{ص ع} + \text{س ع} + \text{س ص}}{\text{س ص ع}} = \frac{١}{٦٠}$$

$\therefore$ س ص ع = ٦٠ {ص ع + س ع + س ص} ------- (١)

$\because$ { س + ص + ع }^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ ص ع + ٢س ع + ٢س ص ------- (٢)

$\therefore$ { س + ص + ع }^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ { ص ع + س ع + س ص }

$\because$ س + ص + ع = ث ------- (٣)

، $\because$ س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ث^{٢} – ٤ -------------- (٤)

بالتعويض من : (٢) ، (٣) في (١)

$\therefore$ ث^{٢} = ث^{٢} – ٤ + ٢ { ص ع + س ع + س ص }

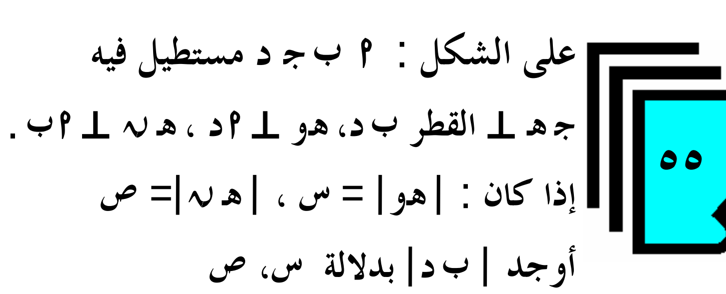
$\therefore$ ص ع + س ع + س ص = ٢ -------------- (٥)

بالتعويض من : (٥) في (١)

$\therefore$ س ص ع = ٦٠ × ٢

$\therefore$ س ص ع = ١٢٠





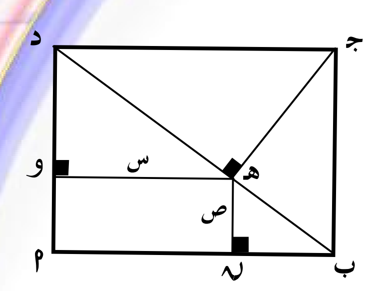
٥٥

على الشكل : أ ب جـ د مستطيل فيه

جـ هـ ⊥ القطر ب د، هو ⊥ أ د ، هـ ن ⊥ أ ب .

إذا كان : |هو| = س ، |هـ ن| = ص

أوجد |ب د| بدلالة س، ص



[المصدر : مسابقة ولاية نيو ميكسيكو الأمريكية – ٥ فبراير ٢٠٠٥ م]



نفرض أن : |د هـ| = ع$_2$ ، |هـ ب| = ع$_1$

في △△ د هـ جـ ، هـ و د

∵ ∠ جـ هـ د = ∠ د و هـ = ٩٠°

، ∵ ∠ جـ د هـ + ∠ هـ د و = ٩٠°

، ∵ ∠ جـ د هـ + ∠ هـ جـ د = ٩٠°

∴ ∠ هـ د و = ∠ هـ جـ د

∴ يتشابه △△ د جـ هـ ، هـ و د وينتج أن :-

$\frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{هـ د}}$

∴ $\frac{\text{ع}_2}{\text{س}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{ع}_2}$

∴ ع$_2^2$ = س × د جـ ------------------(١)

في △ ن ب هـ القائم في ∠ ن

|ب ن|^2 = |ب هـ|^2 - |ن هـ|^2

∴ |ب ن|^2 = |ب هـ|^2 - ص^2

∴ |ب ن| = $\sqrt{\text{|ب هـ|}^2 - \text{ص}^2}$

من تشابه △△ هـ ب ن ، ب جـ هـ

$\frac{\text{هـ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ن هـ}}{\text{ب هـ}}$

∴ |ب هـ|^2 = ب جـ × ص

∵ ب جـ = ص + د و

∴ |ب هـ|^2 = ص × {ص + د و}

$\therefore |ب هـ|^2 = ص^2 + ص \times د و$ ------------------ (٢)

في Δ د هـ و القائم في $\angle$ و

$|د و| = \sqrt{ع_1^2 - س^2}$ ------------------ (٣)

من (٢) ، (٣)

$\therefore |ب هـ|^2 = ص^2 + ص \sqrt{ع_1^2 - س^2}$ ------------------ (٤)

، $\because |ب ن| = \sqrt{|ب هـ|^2 - ص^2}$

$\therefore |ب ن| = \sqrt{ص^2 + ص \sqrt{ع_1^2 - س^2} - ص^2}$

$\therefore |ب ن| = \sqrt{ص \sqrt{ع_1^2 - س^2}}$

$= \{ص [ع_1^2 - س^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$

$= [ص \{ع_1^2 - س^2\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$

$= ص^{\frac{1}{2}} \{ع_1^2 - س^2\}^{\frac{1}{4}}$

$\because$ جـ د = س + ب ن

$\therefore$ جـ د $= س + ص^{\frac{1}{2}} \{ع_1^2 - س^2\}^{\frac{1}{4}}$ ------------------ (٥)

من (٥) ، (١)

$\therefore ع_2^2 = س \times [س + ص^{\frac{1}{2}} \{ع_1^2 - س^2\}^{\frac{1}{4}}]$

$\therefore ع_2^2 = س^2 + س ص^{\frac{1}{2}} \{ع_1^2 - س^2\}^{\frac{1}{4}}$

$\therefore ع_2^2 - س^2 = س ص^{\frac{1}{2}} \{ع_1^2 - س^2\}^{\frac{1}{4}}$

$\therefore ع_2^2 - س^2 \div \{ع_1^2 - س^2\}^{\frac{1}{4}} = س ص^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \{ع_2^2 - س^2\}^{1 - \frac{1}{4}} = س ص^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \{ع_2^2 - س^2\}^{\frac{3}{4}} = س ص^{\frac{1}{2}}$

$\therefore ع_2^2 - س^2 = [س ص^{\frac{1}{2}}]^{\frac{4}{3}}$

$\therefore ع_2^2 - س^2 = س^{\frac{4}{3}} ص^{\frac{2}{3}}$

$ع_2^2$



∴ = س ص + س^2

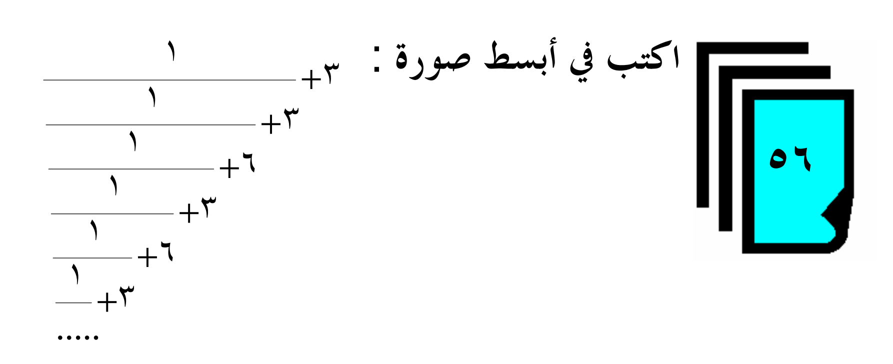
∴ ع$_2$ = |هـ د| = [س ص + س^2

∴ |بهـ| = [ص^2 + ص [ع$_2^2$ – س^2 ------------------ (٦)

∵ |ب د| = |بهـ| + |د هـ| ------------------ (٧)

بالتعويض من (٦) في (٧)

∴|ب د| = [س ص + س^2 + [ص^2 + ص [ع$_2^2$ – س^2



٥٦ اكتب في أبسط صورة :

$$٣ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \cfrac{١}{٣ + \cdots}}}}}$$

[المصدر : البطولة السنوية لمعهد ملتون الأمريكي – ٢٥ فبراير ٢٠٠٦م]



نفرض أن : $\text{س} = \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \cfrac{١}{٣ + \cdots}}}}} = \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \text{س}}} = \cfrac{١}{\cfrac{١٨ + ٣\text{س} + ١}{٦ + \text{س}}}$

$\therefore \text{س} = \dfrac{٦ + \text{س}}{١٨ + ٣\text{س} + ١} = \dfrac{٦ + \text{س}}{١٩ + ٣\text{س}}$

$\therefore \text{س} \{ ١٩ + ٣ \text{س} \} = ٦ + \text{س}$

$\therefore ١٩ \text{س} + ٣ \text{س}^٢ = ٦ + \text{س}$

$\therefore ١٩ \text{س} + ٣ \text{س}^٢ - ٦ - \text{س} = \text{صفر}$

$\therefore ٣ \text{س}^٢ + ١٨ \text{س} - ٦ = \text{صفر}$ بالقسمة على ٣

$\therefore \text{س}^٢ + ٦ \text{س} - ٢ = \text{صفر}$

وبحل المعادلة باستخدام القانون العام

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أ}\text{ج}}}{٢\text{أ}}$$

$\therefore \text{س} = -٣ - \sqrt{١١}$ (الإجابة السالبة مرفوضة)

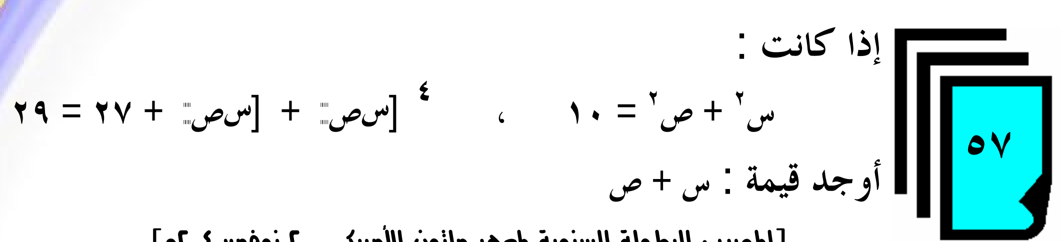
$\therefore \text{س} = -٣ + \sqrt{١١}$



∵ $$٣+\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+\cfrac{١}{٣+\cdots}}}}} = ٣ + س$$

∴ $$٣+\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+\cfrac{١}{٣+\cdots}}}}} = ٣ + -٣ +]١١$$

∴ $$٣+\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+\cfrac{١}{٣+\cdots}}}}} =]١١$$



٥٧

إذا كانت :

س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ ، $\sqrt[٤]{\text{س ص}}$ + $\sqrt{\text{س ص}}$ + ٢٧ = ٢٩

أوجد قيمة : س + ص

[المصدر : البطولة السنوية لمعهد ملتون الأمريكي –٢٠ نوفمبر ٢٠٠٤م]



نفرض أن : ك = $\sqrt[٤]{\text{س ص}}$

∴ ك = (س ص)$^{\frac{1}{4}}$

∴ ك^{٤} = س ص

∴ ك^{٢} = $\sqrt{\text{س ص}}$

∴ بالتعويض في المعادلة : $\sqrt[٤]{\text{س ص}}$ + $\sqrt{\text{س ص}}$ + ٢٧ = ٢٩

∴ ك + ك^{٢} + ٢٧ = ٢٩

∴ ك^{٢} + ك – ٢ = صفر

∴ (ك + ٢)(ك – ١) = صفر

∴ ك = -٢

∴ $\sqrt[٤]{\text{س ص}}$ = - ٢ (مرفوض)

، ∴ $\sqrt{\text{س ص}}$ = ١

∴ س ص = ١

بفرض أن : س+ ص = ع

بالتربيع ∴ س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢} = ع^{٢}

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ص = ع^{٢}

∴ (س^{٢} + ص^{٢}) + ٢س ص = ع^{٢}

∴ ١٠ + ٢ × ١ = ع^{٢}

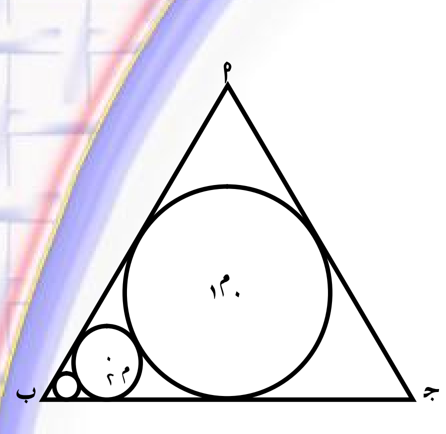
∴ ع^{٢} = ١٢

∴ ع = $\sqrt{١٢}$

∴ س+ ص = $\sqrt{١٢}$



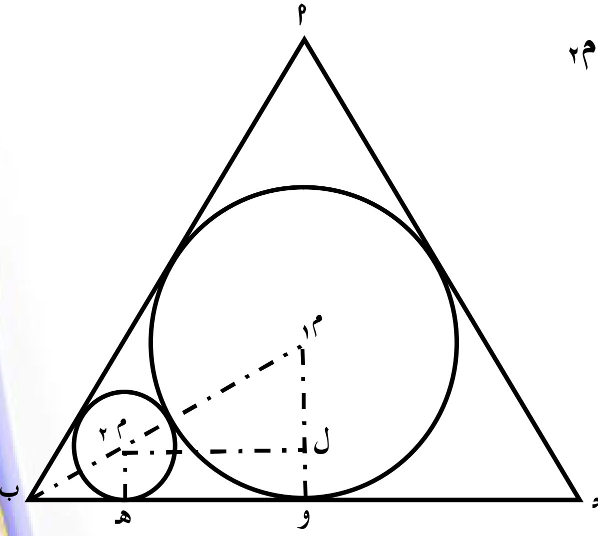
٥٨



ا ب ج مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه الوحدة م١ دائرة مرسومه داخله تمس أضلاعه الداخلية م٢ دائرة مرسومة داخل المثلث تمس ضلعيه ب ج ، ا ب و تمس الدائرة م١، وكذلك م٣ دائرة مرسومة تمس ب ج ، ا ب وتمس الدائرة م٢ وهكذا إذا رسمنا الدوائر : م٤، م٥ ، م٦ .... أوجد مجموع مساحات هذه الدوائر إلى مالا نهاية.

[المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية–١٢مارس ٢٠٠٣م]





نفرض أن : نق١ ، نق٢ نصفي اقطار الدائرتين م١ ، م٢

نصل : م١ ب ، م١ و ، م٢ هـ

نرسم : م٢ ل ⊥ م١ و

∵ ا ب ج ∆ متطابق الأضلاع

∴ ∠ ب = ٦٠°

∵ ب ج ، ب ا مماسان للدائرة م١ من نقطة واحدة

∴ م١ ب ينصف ∠ ب

∴ ∠ م١ ب ج = ٣٠°

∵ م٢ ل // ب ج

∴ ∠ م١ م٢ ل = ٣٠°

∵ جا م١ م٢ ل = $\frac{\text{م١ ل}}{\text{م١ م٢}}$ = $\frac{\text{نق١ - نق٢}}{\text{نق١ + نق٢}}$

، ∵ جا م١ م٢ ل = $\frac{1}{2}$

∴ $\frac{\text{نق١ - نق٢}}{\text{نق١ + نق٢}} = \frac{1}{2}$



∴ ٢ (نق ١ - نق ٢) = نق ١ + نق ٢

∴ ٢ نق ١ - ٢ نق ٢ = نق ١ + نق ٢

∴ نق ١ = ٣ نق ٢ ، ∴ نق ٢ = $\frac{١}{٣}$ نق ١ بالمثل : نق ٣ = $\frac{١}{٣}$ نق ٢

∴ نق ٣ = $\frac{١}{٣}$ نق ٢ = $\frac{١}{٣}$ {$\frac{١}{٣}$ نق ١} = $\frac{١}{٣^٢}$ نق ١ وهكذا

∴ مجموع مساحات الدوائر إلى ما لانهاية = ط { نق ١}^٢ + ط {$\frac{١}{٣}$ نق ١}^٢ + ط { $\frac{١}{٣^٢}$ نق ١}^٢ +.........

= ط { نق ١}^٢ $\left[١+\frac{١}{٩}+\frac{١}{٨١}+......\right]$

∵ $\left[١+\frac{١}{٩}+\frac{١}{٨١}+......\right]$ يمثل متوالية هندسية غير منهية حدها الأول أ = ١ وأساسها : ر = $\frac{١}{٩}$÷١ = $\frac{١}{٩}$

∵ مجموع المتوالية الهندسية الغير منتهية = $\frac{أ}{١-ر}$

∴ مجموع المتوالية = $\frac{١}{١-\frac{١}{٩}}$ = $\frac{١}{\frac{٨}{٩}}$ = $\frac{٩}{٨}$

∴ مجموع مساحات الدوائر إلى ما لانهاية = ط { نق ١}^٢ × $\frac{٩}{٨}$

= $\frac{٩}{٨}$ ط { نق ١}^٢

∵ في Δ م١ ب و القائم في ∠ و ،

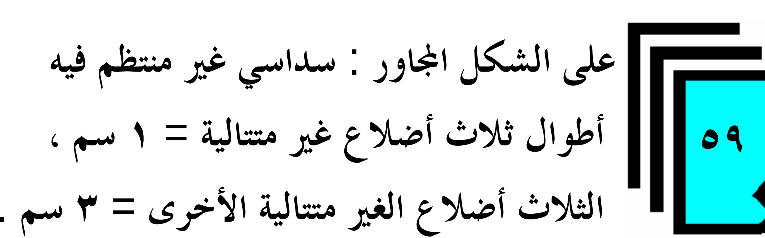
∵ ظا ٣٠° = $\frac{م_١ و}{و ب}$ = نق ١ ÷ $\frac{١}{٢}$

∴ نق ١ = $\frac{١}{٢}$ ظا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$

∴ مجموع مساحات الدوائر إلى ما لانهاية = $\frac{٩}{٨}$ ط {$\frac{\sqrt{٣}}{٦}$}^٢

= $\frac{٣}{٣٢}$ط وحدة مربعة.

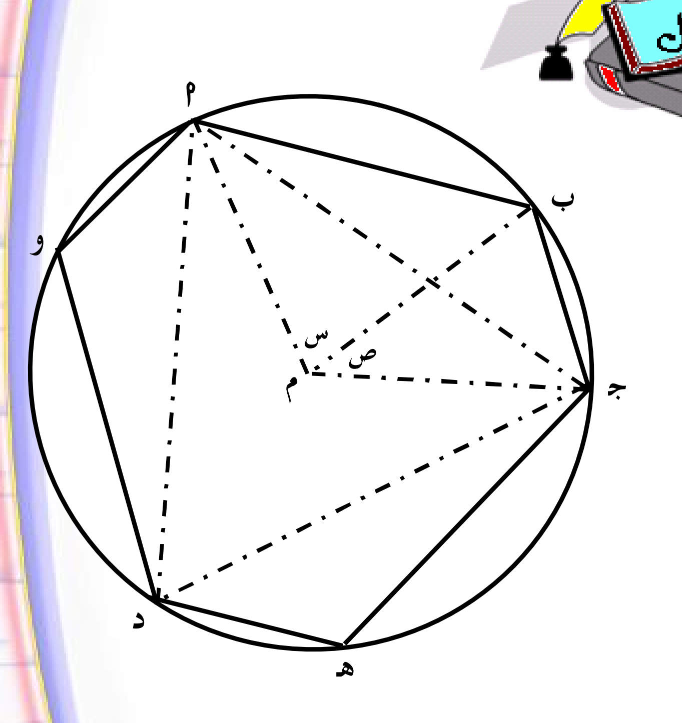
٥٩



على الشكل المجاور : سداسي غير منتظم فيه أطوال ثلاث أضلاع غير متتالية = ١ سم ، الثلاث أضلاع الغير متتالية الأخرى = ٣ سم . أوجد مساحة السداسي.

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ٢٣ فبراير ٢٠٠٠ م]

الحل



نصل : م جـ ، جـ د ، م د ، م م ، ب م ، جـ م

نفرض أن : ∠ ب م م = س

∠ جـ م ب = ص

من تطابق △ △ △ م ب جـ ، هـ جـ د ، و د م

∴ |م د| = |جـ د| = |م جـ|

∴ △ م جـ د متطابق الأضلاع

∴ ∠ م د جـ = ٦٠° محيطية

∴ ∠ م م جـ المركزية = ١٢٠°

∴ س + ص = ١٢٠°

$\therefore \left(\frac{ص}{٢}+\frac{س}{٢}\right)=٦٠°$ ---------- (١)

في △ ب جـ م المتطابق الضلعين (م جـ = م ب = نق)

$\therefore$ ∠ م ب جـ = ∠ م جـ ب = $\frac{١٨٠° - ص}{٢}$

، بالمثل في △ م ب م : ∠ م ب م = $\frac{١٨٠° - س}{٢}$

$\therefore$ ∠ م م جـ = $\frac{١٨٠° - ص}{٢} + \frac{١٨٠° - س}{٢}$

$= ٩٠° - \frac{ص}{٢} + ٩٠° - \frac{س}{٢}$

$= ١٨٠° - \left(\frac{ص}{٢}+\frac{س}{٢}\right)$

∴ من (١) ∴ ∠ م م جـ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

باستخدام قانون جيب التمام في △ أ ب ج

| أ ج|^{٢} = | أ ب|^{٢} + | ب ج|^{٢} − ٢ | أ ب| × | ب ج| جتا (أ ب ج)

∴ | أ ج|^{٢} = ٩ + ١ - ٢× ٣ × ١ × جتا ١٢٠°

= ٩ + ١ − ٦ × $\left(-\frac{١}{٢}\right)$

= ١٣

∴ | أ ج| = $\sqrt{١٣}$

∵ مساحة سطح السداسي: أ ب ج د هـ و = مساحة سطح △ أ د ج + ٣(مساحة سطح △ أ ب ج

= $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{١٣}$ × $\sqrt{١٣}$ × جا٦٠° + ٣ ($\frac{١}{٢}$ × ١ × ٣ × جا ١٢٠°)

= $\frac{١٣}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{٩}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= $\left(\frac{١٣}{٢}+\frac{٩}{٢}\right)\times\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= $\left(\frac{٢٢}{٢}\right)\times\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= $\frac{١١\sqrt{٣}}{٢}$ سم^{٢}



أوجد جميع الأزواج المرتبة (س، ص) التي تحقق المعادلة :

$$س^{٦} = ص^{٢} + ٥٣$$

حيث : س ، ص ∈ صـ

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –١٨ فبراير ١٩٩٨م]



∵ $س^{٦} = ص^{٢} + ٥٣$

∴ $س^{٦} - ص^{٢} = ٥٣$

∴ $\{ س^{٣} - ص \}\{ س^{٣} + ص \} = ٥٣$

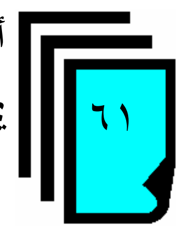
∴ الأقواس تأخذ الاحتمالات التالية :

$س^{٣} - ص = ٥٣$	$س^{٣} - ص = ١$	$س^{٣} - ص = - ٥٣$	$س^{٣} - ص = - ١$
$س^{٣} + ص = ١$	$س^{٣} + ص = ٥٣$	$س^{٣} + ص = - ١$	$س^{٣} + ص = - ٥٣$
بالجمع	بالجمع	بالجمع	بالجمع
$٢س^{٣} = ٥٤$	$٢س^{٣} = ٥٤$	$٢س^{٣} = - ٥٤$	$٢س^{٣} = - ٥٤$
$س^{٣} = ٢٧$	$س^{٣} = ٢٧$	$س^{٣} = - ٢٧$	$س^{٣} = - ٢٧$
$س = ٣$	$س = ٣$	$س = - ٣$	$س = - ٣$
ومنها : ص = -٢٦	ومنها : ص = ٢٦	ومنها : ص = ٢٦	ومنها : ص= -٢٦

∴ الأزواج المرتبة هي :

(٣ ، - ٢٦)	(٣ ، ٢٦)	(- ٣ ، ٢٦)	(- ٣ ، - ٢٦)




٦١

أذكر الشرط الذي يجعل المستقيم الذي معادلته : س + ص = ك يمس الدائرة التي معادلتها : س^{٢}+ ص^{٢}= ﻦ .

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ٢٠ فبراير ٢٠٠٢م]



∵ المستقيم: س + ص = ك يمس الدائرة: س^{٢}+ ص^{٢}= ﻦ

∴ ص = ك - س تحقق معادلة الدائرة

∴ س^{٢} + { ك - س }^{٢} = ﻦ

∴ س^{٢} + ك^{٢} – ٢ ك س + س^{٢} = ﻦ

∴ ٢س^{٢} – ٢ ك س + ك^{٢} - ﻦ = ٠

∵ المماس يمس الدائرة في نقطة واحدة

∴ للمعادلة : ٢س^{٢} – ٢ ك س + ك^{٢} - ﻦ = ٠ حل وحيد

∴ مميز المعادلة السابقة والتي هي معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد = ٠

∵ في المعادلة السابقة : ٩ (معامل س^{٢}) = ٢

ب (معامل س) = - ٢ ك

ج (الحد الخالي من س) = ك^{٢} - ﻦ

∴ ب^{٢} – ٤ ٩ جـ = ٠

∴ ٤ ك^{٢} – ٤ × ٢ × (ك^{٢} - ﻦ)= ٠

∴ ٤ ك^{٢} – ٨ (ك^{٢} - ﻦ)= ٠

∴ ٤ ك^{٢} – ٨ ك^{٢} + ٨ ﻦ = ٠

∴ ٨ ﻦ – ٤ ك^{٢} = ٠ بالقسمة على ٤

∴ ٢ ﻦ –ك^{٢} = ٠

∴ الشرط هو : ٢ ﻦ = ك^{٢}

٦٢

إذا كان : جا س + جتاس = $\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٢}$ ، حيث : $\frac{ط}{٢}$ > س > ٠

فأوجد قيم س

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ١٩فبراير٢٠٠٣م]



بالتربيع : جا^{٢}س + ٢ جا س جتا س + جتا^{٢}س = $\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٢}$

∴ ٢ جا س جتا س + (جا^{٢}س + جتا^{٢}س) = ١ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ٢ جا س جتا س + ١ = ١ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ٢ جا س جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا ٢ س= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث : ط > ٢ س > ٠

∴ ٢ س = ٦٠°

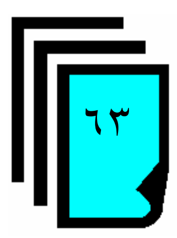
∴ س = ٣٠°

أو : ٢ س = ١٢٠°

∴ س = ٦٠°

∴ س ∈ { ٣٠° ، ٦٠° }.





رجل يستطيع إنجاز عمل ما في ٩ أيام ، ويستطيع ابنه إنجاز نفس العمل في ١٦ يوم ، إذا كانا قد بدءا العمل سوياً ، وبعد ٤ أيام ترك الابن العمل ، وظل الأب يعمل وحيداً .

ما هو عدد الأيام الذي يحتاجها الأب لأداء العمل كله.

[مسابقة ولاية – أوهايو الأمريكية –مارس ٢٠٠٥]



ما ينجزه الأب من عمل خلال يوم واحد = $\frac{١}{٩}$ العمل الكلي

ما ينجزه الابن من عمل خلال يوم واحد = $\frac{١}{١٦}$ من العمل الكلي

ما ينجزه الأب والابن من عمل خلال يوم واحد = $\frac{١}{٩}+\frac{١}{١٦}=\frac{٢٥}{١٤٤}$ من العمل الكلي

ما تم إنجازه في ٤ أيام عمل = $٤\times\frac{٢٥}{١٤٤}=\frac{٢٥}{٣٦}$ من العمل الكلي

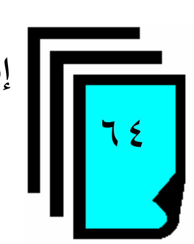
الباقي من العمل والذي يجب أن ينجزه الأب بعد أن غادر الابن العمل = $١-\frac{٢٥}{٣٦}=\frac{١١}{٣٦}$ من العمل الكلي

نفرض أن : س = عدد الأيام الزائدة التي يستغرقها الأب في إنجاز باقي العمل بعد مغادرة الابن

$\therefore \frac{س}{٩}=\frac{١١}{٣٦}$

$\therefore$ س = $٩\times\frac{١١}{٣٦}=٣.٧٥$ يوم.





إذا رسمت النقطة هـ داخل المستطيل ٩ ب جـ د ، الذي فيه : |٩ ب| = ٦سم ومساحة المثلث ٩ هـ ب = ٦سم^{2} ، ومساحة المثلث جـ هـ د = ١٢ سم^{2} .

أوجد : |هـ ٩|^{2} - |هـ ب|^{2} + |هـ جـ|^{2} - |هـ د|^{2}

[المصدر : بطولة مدارس ستانفورد الأمريكية - مسابقة الهندسة – ٢٠٠١م]



نصل: ب هـ ، جـ هـ ، ٩ هـ ، د هـ

نرسم : $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ ⊥ ٩ ب يقطع جـ د في و

∵ مساحة المثلث ٩ هـ ب = ٦سم^{2}

، ∵ |٩ ب| = ٦سم ، هـ ن ارتفاع في △ ٩ هـ ب

∴ |هـ ن| = $\frac{٢\times٦}{٦}$ = ٢سم

بالمثل |هـ و| (ارتفاع △ جـ هـ د) = $\frac{٢\times١٢}{٦}$ = ٤ سم

نفرض أن |٩ ن| = س ومنها |و د| = س

نفرض أن |ب ن| = ص ومنها |و جـ| = ص

∴ باستخدام نظرية فيثاغورث في المثلثات : ب ن هـ ، ٩ ن هـ ، جـ و هـ ، د و هـ .

|٩ هـ|^{2} = س^{2} + ٤

|ب هـ|^{2} = ص^{2} + ٤

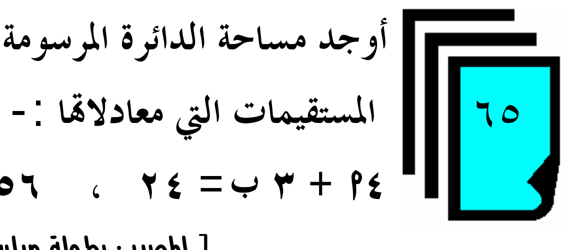
|هـ جـ|^{2} = ص^{2} +١٦

|د هـ|^{2} = س^{2} + ١٦

∴ |هـ ٩|^{2} - |هـ ب|^{2} + |هـ جـ|^{2} - |هـ د|^{2} = س^{2} + ٤ - ص^{2} - ٤ + ص^{2} +١٦ - س^{2} – ١٦

= صفر



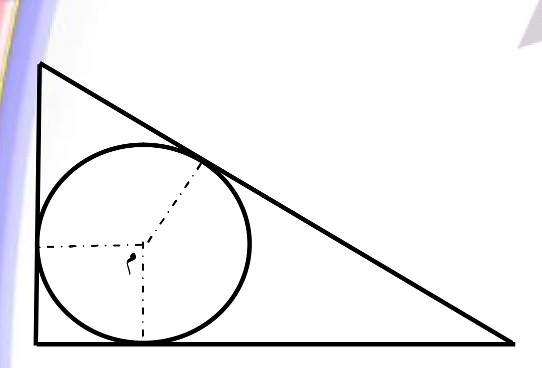


أوجد مساحة الدائرة المرسومة داخل المثلث الناتج من تقاطعات المستقيمات التي معادلاتها :-

٤م + ٣ ب = ٢٤ ، ٥٦ م - ٣٣ ب = -٢٦٤ ، ٣ م - ٤ ب = ١٨

[المصدر : بطولة مدارس ستانفورد الأمريكية - مسابقة الهندسة – ٢٠٠١م]

الحل



∵ ميل المستقيم : ٤م + ٣ ب = ٢٤ يساوي $\frac{-٤}{٣}$

، ∵ ميل المستقيم : ٣م - ٤ ب = ١٨ يساوي $\frac{٣}{٤}$

، ∵ حاصل ضرب الميلين = -١

∴ المستقيمان متعامدان

وللحصول على نقطة تقاطع المستقيمان : ٤م + ٣ ب = ٢٤ ، ٣م - ٤ ب = ١٨

من المعادلة : ٤م + ٣ ب = ٢٤

ب = $\frac{١}{٣}$ (٢٤ – ٤ م) ------------------ (١)

ومن المعادلة : ٣م - ٤ ب = ١٨

ب = $\frac{١}{٤}$ (٣ م - ١٨) ------------------ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{١}{٣}$ (٢٤ – ٤ م) = $\frac{١}{٤}$ (٣ م - ١٨)

∴ ٩٦ – ١٦ م = ٩ م - ٥٤

∴ ٢٥ م = ١٢٠

∴ م = ٦ ومنها ب = $\frac{٣ \times ٦ - ١٨}{٤}$ = ٠

∴ إحدى رؤوس المثلث = (٦ ، ٠)

وبالمثل نحصل على الرأسين الباقيتين : وهما (٠ ، ٨) ، $\left(\frac{-٦٦}{٥}, \frac{-٧٢}{٥}\right)$

والآن نحصل على أطوال أضلاع المثلث من خلال قانون البعد بين نقطتين :

(المسافة بين نقطتين م{ س$_١$، ص$_١$} ، ب{ س$_٢$، ص$_٢$} ل = [{س$_٢$ – س$_١$}^{٢} + {ص$_٢$ - ص$_١$}^{٢}]$^{\frac{١}{٢}}$)



الضلع الأول = $\sqrt{(٦ - ٠)^٢ + (٨ - ٠)^٢} = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = ١٠$ سم

ويعتبر هذا الضلع هو ارتفاع المثلث أو ضلع القائمة الأول

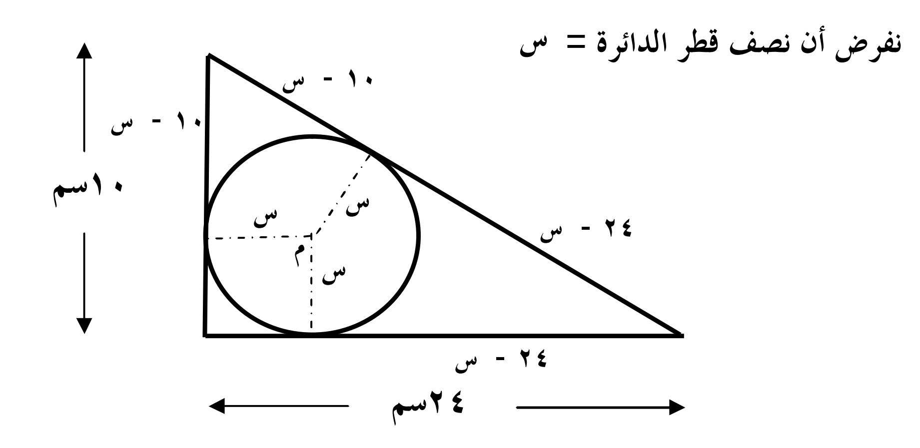
وبالمثل نحصل على الضلع الثاني (ضلع القائمة الثاني) = $\sqrt{\left(٦ + \frac{٦٦}{٥}\right)^٢ + \left(٠ + \frac{٧٢}{٥}\right)^٢}$

$= \sqrt{\left(\frac{٩٦}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٧٢}{٥}\right)^٢}$

$= \sqrt{\frac{١٤٤٠٠}{٢٥}} = ٢٤$ سم

∴ وتر المثلث من نظرية فيثاغورس = $\sqrt{(٢٤)^٢ + (١٠)^٢} = ٢٦$ سم

نفرض أن نصف قطر الدائرة = س

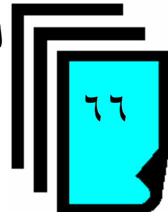


∴ من الرسم السابق : (١٠ - س) + (٢٤ - س) = ٢٦

∴ ٣٤ − ٢ س = ٢٦

∴ س = ٤ (نصف قطر الدائرة)

∴ مساحة الدائرة = ١٦ ط سم ^{٢}



الأشكال : $\triangle$ ، $\square$ ، ~ ، $\odot$ تمثل أربعة أعداد مختلفة تقع بين العدد ١ والعدد ٩ ، استخدم المعادلات التالية للحصول على قيمة : $\odot$

$$\triangle + \square = \odot$$

$$\triangle + \triangle = \sim + \sim + \sim + \sim$$

$$\triangle + \triangle = \sim + \odot$$

[المصدر : المسابقة العامة لولاية تكساس الأمريكية - ٢٠٠٥ م]



نفرض أن : $\triangle$ = س ، $\square$ = ص ، ~ = ع ، $\odot$ = ك

∴ س + ص = ك ------------- (١)

، ٢ س = ٤ ع ------------- (٢)

، ٢ س = ك + ع ------------- (٣)

في المعادلة (٢)

∵ ٢ س = ٥ ع .

،∵ س ، ص أعداد صحيحة < ١٠ .

∴ للمعادلة (٢) حل وحيد هو : س = ٤ ، ع= ٢ .

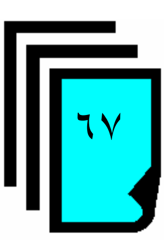
بالتعويض في المعادلة (٣)

∴ ١٠ = ك + ٢. ، ومنها ك = ٦

بالتعويض في المعادلة (١)

∴ ٤ + ص = ٦

∴ ص =٢ .



إذا كانت : $س^٢ - ٣س + ١ = ٠$

فأوجد القيمة العددية للمقدار : $س^٩ + س^٧ + س^{-٩} + س^{-٧}$

[المصدر : المسابقة العامة لولاية تكساس الأمريكية – مسابقة الفرق – ٢٨ فبراير ٢٠٠٤ م]



$\therefore س^٢ - ٣س + ١ = ٠$

$\therefore س^٢ + ١ = ٣س$ (بالقسمة على س حيث $س \neq ٠$)

$\therefore س + \frac{١}{س} = ٣$ ----------------- (١)

$س^٩ + س^٧ + س^{-٩} + س^{-٧} = \{س^٩ + س^٧\} + \{س^{-٧} + س^{-٩}\}$

$= س^٨ \{س + \frac{١}{س}\} + س^{-٨} \{س + \frac{١}{س}\}$

$= \{س + \frac{١}{س}\} \{س^٨ + س^{-٨}\}$

$\therefore$ من المعادلة (١)

$س^٩ + س^٧ + س^{-٩} + س^{-٧} = ٣ \{س^٨ + س^{-٨}\}$ ----------- (٢)

بتربيع المقدار : $س + \frac{١}{س} = ٣$

$\therefore س^٢ + س^{-٢} + ٢ = ٩$

$\therefore س^٢ + س^{-٢} = ٧$ (بالتربيع مرة ثانية)

$\therefore س^٤ + س^{-٤} + ٢ = ٤٩$

$\therefore س^٤ + س^{-٤} = ٤٧$ (بالتربيع مرة ثالثاً)

$\therefore س^٨ + س^{-٨} + ٢ = ٢٢٠٩$

$\therefore س^٨ + س^{-٨} = ٢٢٠٧$ ------------- (٣)

بالتعويض من (٢) في (٣)

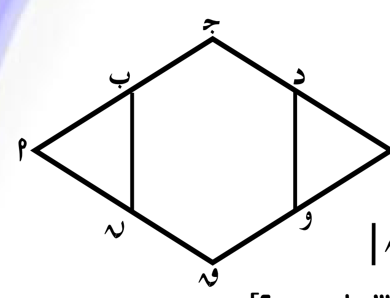
$س^٩ + س^٧ + س^{-٩} + س^{-٧} = ٣ \times ٢٢٠٧ = ٦٦٢١$



على الشكل : أ جـ هـ ى متوازي أضلاع ،

ب جـ د و ى ن سداسي منتظم


إذا كان : | جـ ى| = ١٠ سم .أوجد : | أ ن|



[المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية–٣ مارس ٢٠٠٥]




نفرض أن : م مركز السداسي المنتظم ب جـ د و ى ن

نرسم : م ك ⊥ ب ك

∵ | جـ ى| = ١٠ سم

∴ | م جـ| ٥ سم

∵ زاوية رأس السداسي المنتظم = $\frac{(٦-٢)\times ١٨٠^\circ}{٦} = ١٢٠^\circ$

، ∵ م جـ ينصف ∠ جـ

∴ ∠ م جـ ب = ٦٠°

في Δ م جـ ك القائم في ∠ ك نستطيع استنتاج أن ∠ جـ م ك = ٣٠°

∴ |جـ ك| (الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث القائم) = ٢,٥ سم

∴ | ب جـ| = ٥ سم.

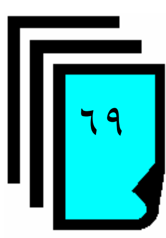
أي أن طول ضلع السداسي المنتظم ب جـ د و ى ن = ٥ سم

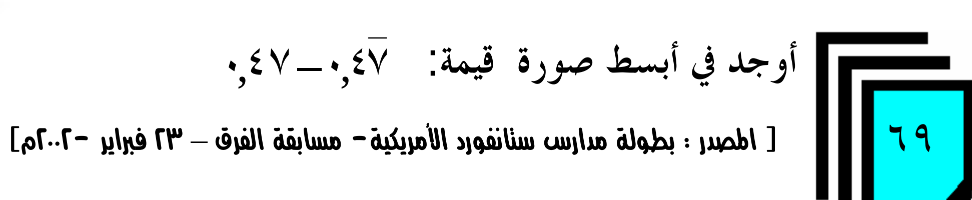
∵ ∠ أ ب ن = ∠ أ ن ب = ٦٠° (مكملات لزوايا رأس السداسي المنتظم)

، ∵ Δ أ ب ن متطابق الأضلاع

∴ | أ ن| = ٥ سم.







أوجد في أبسط صورة قيمة: $٠,٤\overline{٧} - ٠,٤٧$

[المصدر : بطولة مدارس ستانفورد الأمريكية- مسابقة الفرق – ٢٣ فبراير -٢٠٠٢م]



نفرض أن : س = $٠,٤\overline{٧}$

∴ ١٠س = $٤,\overline{٧}$

∴ ١٠٠س = $٤٧,\overline{٧}$

بالطرح ∴ ١٠٠ س - ١٠ س = $٤٧,\overline{٧}$ - $٤,\overline{٧}$ = ٤٣

∴ س = $\frac{٤٣}{٩٠}$

∴ $٠,٤\overline{٧} - ٠,٤٧$ = $\frac{٤٣}{٩٠}$ - ٠,٤٧

= $\frac{٤٣}{٩٠}$ - $\frac{٤٧}{١٠٠}$

= $\frac{٤٣٠٠ - ٤٢٣٠}{٩٠٠٠}$

= $\frac{٧}{٩٠٠}$.

.



٧٠

أوجد أصغر عدد صحيح فردي ن يجعل حاصل الضرب التالي



أكبر من ١٠٠٠:-

$$٢^{\frac{١}{٧}} \times ٢^{\frac{٣}{٧}} \times ٢^{\frac{٥}{٧}} \times ....\times ٢^{\frac{١}{٧}\{٢ن+١\}}$$

[المصدر : المسابقة الأمريكية الموحدة - مارس ١٩٧٦ م]



∵ مجموع الأسس = $\frac{١}{٧}+\frac{٣}{٧}+\frac{٥}{٧}+...........+\frac{١}{٧}\{٢ن+١\}$

$= \frac{١}{٧}\left[١ + ٣ + ٥ + ... + \{٢ن + ١\} \right]$

نفرض أن عدد حدود المتتابعة : ١ ، ٣ ، ٥ ، .... ، {٢ن + ١ } يساوي م

∵ $ح_{ن}$ = الحد الأول في المتتابعة + (عدد حدود المتتابعة – ١) الأساس

، ∵ الحد العام للمتتابعة $ح_{ن}$ = الحد الأخير

∴ الحد الأخير للمتتابعة = الحد الأول في المتتابعة + (عدد حدود المتتابعة – ١) الأساس

∴ $٢ن + ١ = ١ + (م - ١) \times ٢$

∴ $٢ن + ١ = ١ + ٢م - ٢$

∴ $٢ن = ٢م - ٢$ بالقسمة على ٢

∴ $م = ن + ١$

∵ مجموع حدود المتتابعة = $\frac{١}{٢}$عدد حدود المتتابعة [٢ × الحد الأول + (عدد حدود المتتابعة – ١) الأساس]

∴ مجموع حدود المتتابعة = $\frac{١}{٢}(ن + ١)\left[٢ \times ١ + \{ن + ١ - ١\} \times ٢\right]$

$= \frac{١}{٢}(ن + ١)\left[٢ + ٢ن\right]$

$= \frac{١}{٢}(ن + ١) \times ٢\{ن + ١\}$

$= \{ن + ١\}\{ن + ١\}$

$= \{ن + ١\}^{٢}$

∴ مجموع الأسس = $\frac{١}{٧}\{ن + ١\}^{٢}$



$$\therefore\ ٢^{\frac{١}{٧}\{\text{ن}+١\}^{٢}} > ١٠٠٠$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\text{لو}\ ٢^{\frac{١}{٧}\{\text{ن}+١\}^{٢}} > \text{لو}\ ١٠^{٣}$$

$$\frac{١}{٧}\{\text{ن}+١\}^{٢}\ \text{لو}\ ٢ > ٣$$

$$\{\text{ن}+١\}^{٢}\ \text{لو}\ ٢ > ٣\times ٧$$

$$\{\text{ن}+١\}^{٢} > ٢١ \div \text{لو}\ ٢$$ **باستخدام الحاسبة لإيجاد لو ٢**

$$\{\text{ن}+١\}^{٢} > ٢١ \div ٠,٣٠١$$

$$\{\text{ن}+١\}^{٢} > ٦٩$$

من الممكن من العلاقة السابقة استنتاج العلاقة:

$$\{\text{ن}+١\}^{٢} > ٨^{٢}$$

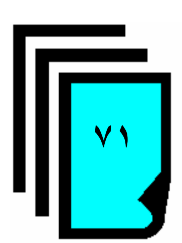
$$\therefore\ \text{ن}+١ > ٨$$

$$\therefore\ \text{ن} > ٧$$

ن = ٨ ، ٩ ، ١٠، ١١،......................

∴ أصغر عدد فردي يحقق المتباينة هو : ن = ٩





إذا كان : ج عدداً حقيقياً وكان المعكوس الجمعي لأحد جذري المعادلة {س^{٢} – ٣ س + ج = ٠ } هو حل للمعادلة {س^{٢} + ٣ س - ج = ٠ } .
فأوجد جذري المعادلة : س^{٢} – ٣ س + ج = ٠

[المصدر : المسابقة الأمريكية الموحدة- مارس ١٩٧٦ م]



∵ المعكوس الجمعي لأحد جذري المعادلة {س^{٢} – ٣ س + ج = ٠ } هو حل للمعادلة {س^{٢} + ٣ س - ج = ٠ }

وبفرض أن أحد جذري المعادلة الأولى = م

∴ م ، - م هما على الترتيب جذران للمعادلتين: {س^{٢} – ٣ س + ج = ٠ } ، {س^{٢} + ٣ س - ج = ٠ }

∴ م^{٢} – ٣ م + ج = ٠ ، م^{٢} + ٣ م - ج = ٠

بالجمع ∴ ٢ م^{٢} = ٠

∴ م = ٠ ، ومنها ج = ٠

∴ بالتعويض عن قيمة ج في المعادلة : س^{٢} – ٣ س + ج = ٠

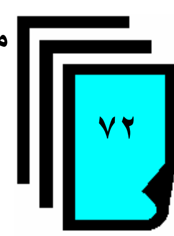
∴ س^{٢} – ٣ س = ٠

∴ س (س – ٣) = ٠

∴ س = ٠ ، ٣

∴ جذرا المعادلة : { ٠ ، ٣ }.





ما هو عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين عشرة ومائة ، والتي كل منها إذا كتب في النظام العشري ، يزداد بمقدار تسعة ، عند عكس وضع رقميه؟

[المصدر : المسابقة الأمريكية الموحدة- مارس ١٩٧٦ م]



نفرض أن رقم الآحاد = س ، رقم العشرات = ص

∴ { ص + ١٠ س } - { س + ١٠ ص } = ٩

∴ ص + ١٠ س - س - ١٠ ص = ٩

∴ ٩ س – ٩ ص = ٩ بالقسمة على ٩

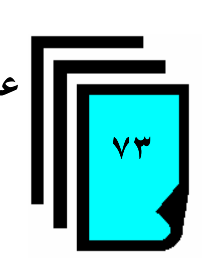
∴ س - ص = ١

∴ رقم الآحاد يزيد واحداً عن رقم العشرات

∴ الأعداد هي : { ١٢ ، ٢٣ ، ٣٤ ، ٤٥ ، ٥٦ ، ٦٧ ، ٧٨ ، ٨٩ }

∴ عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين عشرة ومائة ، والتي كل منها إذا كتب في النظام العشري ، يزداد بمقدار تسعة ، عند عكس وضع رقميه = ٨ أعداد .

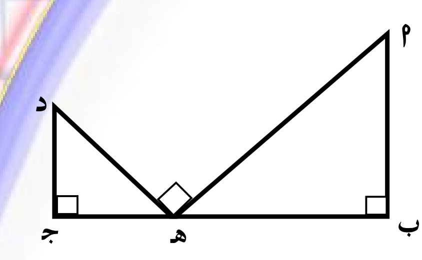




على الشكل : |أ ب| = ١٢ سم ،

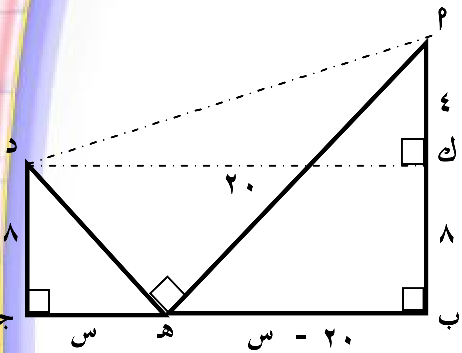
|ب ج| = ٢٠ سم ، |ج د| = ٨ سم

أوجد : |هـ ج|.



[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ١٩فبراير٢٠٠٣م]





نرسم : د ك ⊥ أ ب ، نصل أ د ، نفرض أن : |هـ ج| = س

∴ |ب هـ| = ٢٠ - س

من السهل إثبات أن الشكل ك ب ج د مستطيل

∴ |ك ب| = ٨ سم ، |ك د|= ٢٠سم ومنها |أ ك| = ٤ سم

∴ في △ أ ك د القائم في ∠ك

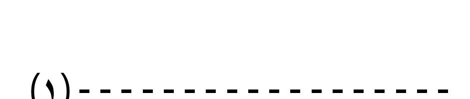
|أ د|^{٢} = (٢٠)^{٢} + (٤)^{٢}

∴ |أ د|^{٢} = ٤٠٠ + ١٦ = ٤١٦

في △ أ هـ د القائم في ∠ هـ

|أ د|^{٢} = |أ هـ|^{٢} + |هـ د|^{٢}

∴ ٤١٦= |أ هـ|^{٢} + |هـ د|^{٢} ------------------- (١)



في △ أ ب هـ القائم في ∠ ب

|أ هـ|^{٢} = (١٢)^{٢} + (٢٠ - س)^{٢} ------------------- (٢)

في △ د هـ ج القائم في ∠ ج

|هـ د|^{٢} = (٨)^{٢} + س^{٢} ------------------- (٣)

بالتعويض (٢) ، (٣) في (١)

∴ ٤١٦= (١٢)^{٢} + (٢٠ - س)^{٢} + (٨)^{٢} + س^{٢}

∴ ٤١٦ = ١٤٤ + ٤٠٠ – ٤٠س + س^{٢} + ٦٤ + س^{٢}

∴ ٢ س^{٢} = ٦٠٨ – ٤١٦ – ٤٠ س

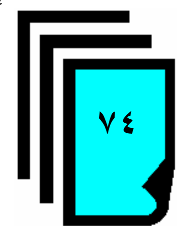
∴ ٢ س^{٢} +٤٠ س + ١٩٢ = ٠ بالقسمة على ٢

∴ س^{٢} +٢٠ س + ٩٦= ٠

∴ (س – ١٢) (س – ٨) = ٠

∴ س = ١٢ أو ٨

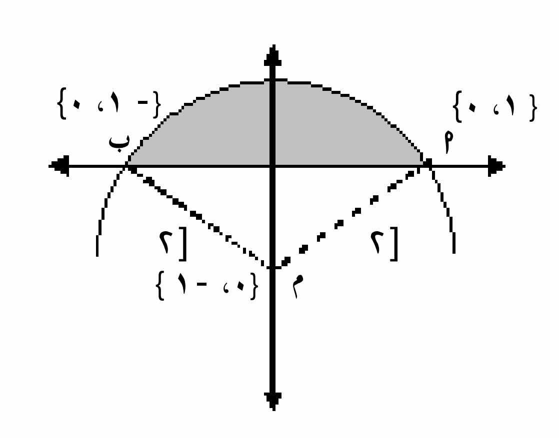




أوجد المساحة الواقعة أعلى محور السينات ، وأسفل المنحنى

س^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢





المنحنى الذي معادلته : س^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢

يمثل دائرة نصف قطرها √٢ ومركزها (٠ ، -١)

وللحصول على نقطتي تقاطع الدائرة مع محور السينات

نضع ص = ٠ في معادلة الدائرة

∴ س^{٢} + (٠+ ١)^{٢} = ٢

∴ س^{٢} + ١ = ٢

∴ س^{٢} = ١

ومنها س = ± ١

∴ نقطتي تقاطع الدائرة مع محور السينات : أ(١ ، ٠) ، ب(- ١ ، ٠)

∴ | أ ب| = √[{١ + ١}^{٢} + {٠ - ٠}^{٢}] = √٢^{٢} = ٢

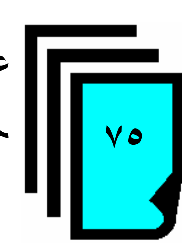
∴ △ أ ب م قائم الزاوية في م { | أ ب |^{٢} = | أ م|^{٢} + | ب م|^{٢} } عكس نظرية فيثاغورس

∴ مساحة القطاع الدائري أ م ب يمثل ربع مساحة الدائرة = ١/٤ ط نق^{٢} = ١/٤ ط × { √٢}^{٢} = ١/٢ ط

∴ مساحة △ أ م ب = ١/٢ √٢ × √٢ = ١

∴ مساحة المنطقة المظللة = ١/٢ ط − ١



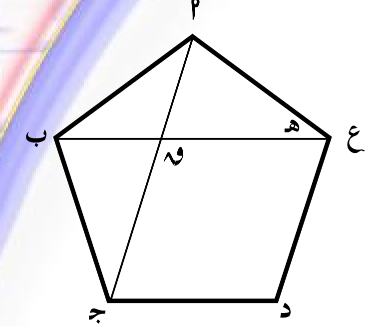


على الشكل : م ب ج د ع

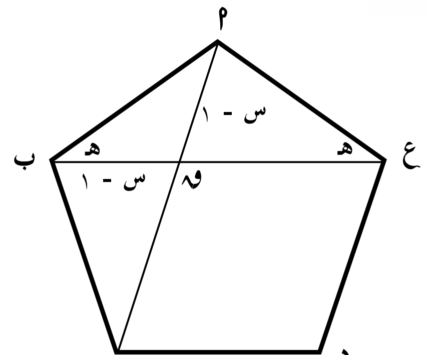
خماسي منتظم طول ضلعه ١ سم .


إذا كان : |ع ب| = س ،

قياس ∠ م ع ب = هـ ، أوجد : |س| ، جتا هـ







∵ ع ب] د ج ، م ج] ع د ، |ع د| = |د ج| = ١

∴ الشكل : ع د ج و معين

∴ |ع د| = |د ج| = |ج و| = |و ع| = ١

∵ |ع ب| = س

∴ |م و| = |و ب| = س − ١

∴ △ م و ب متطابق الضلعين

، وفي △ م ع ب ∵ |م ع| = |م ب|

∴ ∠ م ع ب = ∠ م ب ع = هـ

∴ △ △ ع م ب ، م و ب

∵ ∠ م ع ب = ∠ ب م و ، ∠ م ب و = ∠ م ب ع

∴ △ △ يتشابهان وينتج أن : $= \frac{\text{ع م}}{\text{م و}}$

∴ $\frac{\text{س}}{١} = \frac{١}{\text{س} - ١}$

∴ س^{٢} - س = ١

∴ س^{٢} - س - ١ = ٠ (١) ------ باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية

∴ س = $\frac{١}{٢}$ {١ -]٥ }

باستخدام قانون جيب التمام في △ م و ع

∴ |م و|^{٢} = |م ع|^{٢} + |و ع|^{٢} - ٢ |م ع| × |و ع| جتا هـ

∴ {س - ١}^{٢} = ١ + ١ − ٢ × ١ × ١ × جتا هـ



∴ {س - ١}^{٢} = ٢ – ٢ جتا هـ

∴ ٢ جتا هـ = ٢ - {س - ١}^{٢}

∴ جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ [٢ - {س - ١}^{٢}]

∴ جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ [٢ - س^{٢} + ٢ س – ١]

من (١) : س^{٢} = س + ١

∴ جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ [٢ - {س + ١} + ٢ س – ١]

∴ جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ [٢ - س- ١ + ٢ س – ١]

∴ جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ س

∴ جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ [$\frac{١}{٢}$ {١ - [٥] }]

∴ جتا هـ = $\frac{١}{٤}$ {١ - [٥] }.



٧٦

١) أوجد : $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \text{س}\left\{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}-\text{س}\right\}$

٢) أوجد : $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \left\{٣^{\text{س}}+٣^{٢\text{س}}\right\}^{\frac{١}{\text{س}}}$

٣) أوجد $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢}\{\text{جا س}+\text{جتا}^{٣}\text{س}^{٢}\}}{\{\text{س}^{٢}+١\}\{\text{س}-٣\}}$



١) أوجد : $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \text{س}\left\{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}-\text{س}\right\}$

$$\text{س}\left\{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}-\text{س}\right\}\times\frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}+\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}+\text{س}}$$ بالضرب في المرافق

$$\therefore=\frac{\text{س}\left[\{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\}^{٢}-\{\text{س}\}^{٢}\right]}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}+\text{س}}=\frac{\text{س}\left[\text{س}^{٢}+١-\{\text{س}\}^{٢}\right]}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}+\text{س}}$$

$$=\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}+\text{س}}$$

بالقسمة على س

$$=\frac{١}{\sqrt{١+\frac{١}{\text{س}^{٢}}}+١}$$

$$\therefore\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{١}{\sqrt{١+\frac{١}{\text{س}^{٢}}}+١}=\frac{١}{\sqrt{١+٠}+١}=\frac{١}{٢}$$

٢) أوجد : $\lim\limits_{س \to \infty} \left\{ ٣^{س} + ٣^{٢س} \right\}^{\frac{١}{س}}$

$$\lim\limits_{س \to \infty} \left\{ ٣^{س} + ٣^{٢س} \right\}^{\frac{١}{س}} = \lim\limits_{س \to \infty} \left\{ ٣^{س} + ٩^{س} \right\}^{\frac{١}{س}}$$

$$= \lim\limits_{س \to \infty} \left\{ ٩^{س} \left\{ \frac{٣^{س}}{٩^{س}} + \frac{٩^{س}}{٩^{س}} \right\} \right\}^{\frac{١}{س}} = \lim\limits_{س \to \infty} \left\{ ٩^{س} \left\{ \left(\frac{٣}{٩}\right)^{س} + ١ \right\} \right\}^{\frac{١}{س}}$$

$$= \lim\limits_{س \to \infty} \left\{ ٩^{س} \left\{ \left(\frac{١}{٣}\right)^{س} + ١ \right\} \right\}^{\frac{١}{س}} = \lim\limits_{س \to \infty} \left\{ \left\{ ٩^{س} \right\}^{\frac{١}{س}} \left\{ \left(\frac{١}{٣}\right)^{س} + ١ \right\}^{\frac{١}{س}} \right\}$$

$$= \lim\limits_{س \to \infty} \left\{ \left\{ ٩ \right\} \left\{ \left(\frac{١}{٣}\right)^{س} + ١ \right\}^{\frac{١}{س}} \right\} = ٩$$

٣) $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{س^{٢}\{ جا\ س + جتا^{٣}س \}}{\{س^{٢} + ١\}\{ س - ٣\}}$

قبل الحل علينا أن نتذكر أن :

$-١ \leqslant جا\ س \leqslant ١$

، $-١ \leqslant جتا\ س \leqslant ١$

ومنها: $-١ \leqslant جتا^{٣}\ س \leqslant ١$

$\therefore -٢ \leqslant جتا^{٣}\ س + جا\ س \leqslant ٢$

بالقسمة على : (س – ٣)

$$\therefore \frac{٢}{س-٣} \leq \frac{جا\ س + جتا^{٣}س}{\{س - ٣\}} \leq \frac{-٢}{س-٣}$$



وبالقسمة على : $س^{٢} + ١$ والضرب في $س^{٢}$

$$\therefore \quad \frac{-٢س^{٢}}{\{س^{٢}+١\}\{س-٣\}} \leqslant \frac{س^{٢}\{جا\,س + جتا^{٣}س\}}{\{س^{٢}+١\}\{س-٣\}} \leqslant \frac{٢س^{٢}}{\{س^{٢}+١\}\{س-٣\}}$$

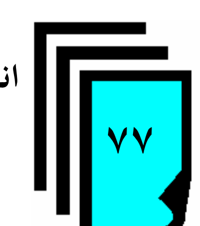
$$\therefore \quad \underset{س \to -\infty}{نهـا} \frac{٢س^{٢}}{\{س^{٢}+١\}\{س-٣\}} = \underset{س \to -\infty}{نهـا} \frac{٢س^{٢}}{س^{٣} - ٣س^{٢} + س - ٣}$$

بالقسمة على : $س^{٣}$

$$\therefore \quad \underset{س \to -\infty}{نهـا} = \frac{\frac{٢}{س}}{١ - \frac{٣}{س} + \frac{١}{س^{٢}} - \frac{٣}{س^{٣}}} = \frac{٠}{١-٠+٠-٠} = ٠$$

بالمثل : $\underset{س \to -\infty}{نهـا} \frac{-٢س^{٢}}{\{س^{٢}+١\}\{س-٣\}} = ٠$

$$\therefore \quad \underset{س \to -\infty}{نهـا} \frac{س^{٢}\{جا\,س + جتا^{٣}س\}}{\{س^{٢}+١\}\{س-٣\}} = ٠$$



انطق مقام الكسر : $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

[مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –٢٠ فبراير ٢٠٠٢ م]



$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{1}{\{\sqrt{2}+\sqrt{3}\}+\sqrt{6}} \times \frac{\{\sqrt{2}+\sqrt{3}\}-\sqrt{6}}{\{\sqrt{2}+\sqrt{3}\}-\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\{\sqrt{2}+\sqrt{3}\}^{2}-6} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}-6} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-1} \times \frac{2\sqrt{6}+1}{2\sqrt{6}+1}$$

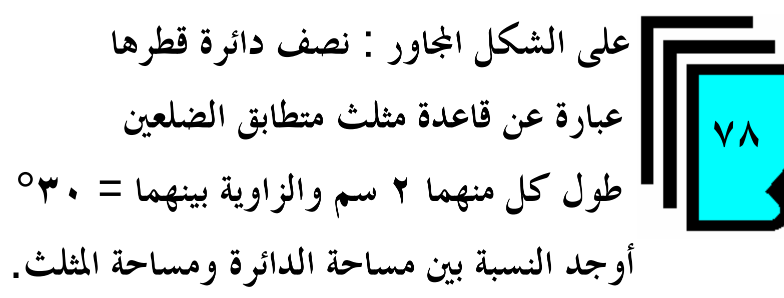
$$= \frac{\{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\}\{2\sqrt{6}+1\}}{23}$$

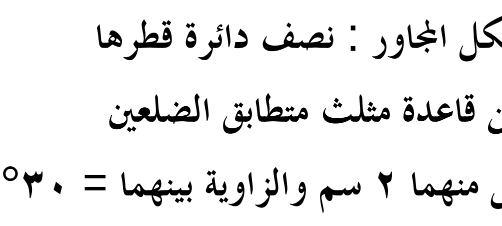
$$= \frac{2\sqrt{12}+\sqrt{2}+2\sqrt{18}+\sqrt{3}-12-\sqrt{6}}{23}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}+6\sqrt{2}+\sqrt{3}-12-\sqrt{6}}{23}$$

$$= \frac{7\sqrt{2}+5\sqrt{3}-\sqrt{6}-12}{23}$$







٧٨

على الشكل المجاور : نصف دائرة قطرها عبارة عن قاعدة مثلث متطابق الضلعين طول كل منهما ٢ سم والزاوية بينهما = ٣٠°
أوجد النسبة بين مساحة الدائرة ومساحة المثلث.

[دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية – مسابقة الهندسة-٢٠٠٢م]





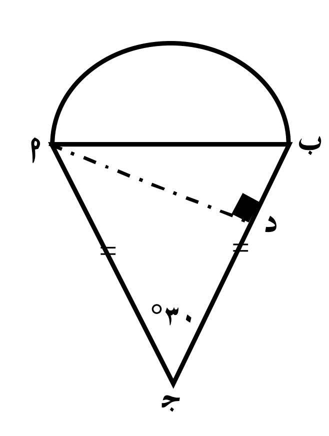
نفرض أن : | أ جـ | = | ب جـ | = ٢

نرسم : أ د ⊥ ب جـ

∵ أ د مقابل للزاوية ٣٠° في △ القائم أ د جـ

∴ | أ د | = ١

∴ مساحة سطح △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ١ سم^{٢}



نرسم : جـ هـ ⊥ أ ب والذي ينصف ∠ جـ

∴ جا ١٥° = $\frac{١}{٢}$ نق

∴ ٢ جا ١٥° = نق

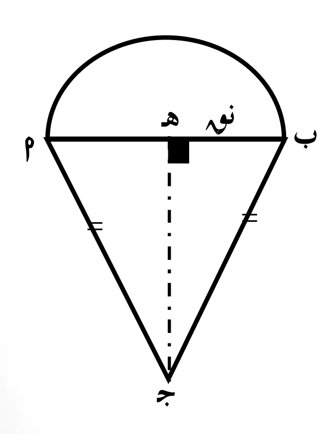
∴ ٢جا {٦٠° - ٤٥°} = نق

∴ ٢ [جا ٦٠° جتا ٤٥° - جتا ٦٠° جا ٤٥°] = نق

∴ ٢ [$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ - $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$] = نق

∴ ٢ [$\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$ - $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$] = نق

∴ نق = [$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$] = $\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٢}$



∴ مساحة نصف الدائرة = $\frac{١}{٢}$ط $\left(\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{١}{٢}${ ٢ - $\sqrt{٣}$ } ط

∴ النسبة = $\frac{١}{٢}${ ٢ - $\sqrt{٣}$ } ط حيث مساحة △ أ ب جـ = ١



٧٩

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يلي:-

١) $ص = ٣ \text{ ظا } \sqrt{س}$.

٢) $ص = \text{جتا}^{٢} \{س^{٣}\}$.

٣) $ص = س^{٢} \text{ جا}^{٣}\{٥ س\}$.

[مسابقة معهد ECC للعلوم الرياضية –٩ ابريل ٢٠٠٥ م]



١) $ص = ٣ \text{ ظا } \sqrt{س}$.

$$ص = ٣ \text{ ظا } س^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{دص}{دس} = ٣ \{\text{قا}^{٢} \sqrt{س}\} \times \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٣\text{قا}^{٢} \sqrt{س}}{٢ \sqrt{س}}$$

٢) $ص = \text{جتا}^{٢} \{س^{٣}\}$.

$$ص = \{\text{جتا} \{س^{٣}\}\}^{٢}.$$

$$\frac{دص}{دس} = ٢ \{\text{جتا} \{س^{٣}\}\} \frac{د}{دس} \{\text{جتا} \{س^{٣}\}$$

$$\frac{دص}{دس} = ٢ \{\text{جتا} \{س^{٣}\}\} \times \{-\text{جا} \{س^{٣}\} \frac{د}{دس} \{س^{٣}\}$$

$$\frac{دص}{دس} = ٢ \{\text{جتا} \{س^{٣}\}\} \times \{-\text{جا} \{س^{٣}\} \times ٣ س^{٢}$$

$$\frac{دص}{دس} = -٦س^{٢}\text{جتا} \{س^{٣}\} \times \text{جا} \{س^{٣}\}$$

٣) $ص = س^{٢} \text{ جا}^{٣}\{٥ س\}$.

$$\frac{دص}{دس} = س^{٢} \frac{د}{دس} \{\text{جا}^{٣}\{٥ س\}\} + \frac{د}{دس} \{س^{٢}\} \text{ جا}^{٣}\{٥ س\}$$

$$\frac{دص}{دس} = س^{٢}\{٣ \text{ جا}^{٢}\{٥ س\}\} \frac{د}{دس} \text{جا}\{٥ س\} + ٢ س \text{ جا}^{٣}\{٥ س\}$$

$$\frac{دص}{دس} = ٣ س^{٢}\text{جا}^{٢}\{٥ س\} \text{ جتا}\{٥ س\} \frac{د}{دس} \{٥ س\} + ٢ س \text{ جا}^{٣}\{٥ س\}$$

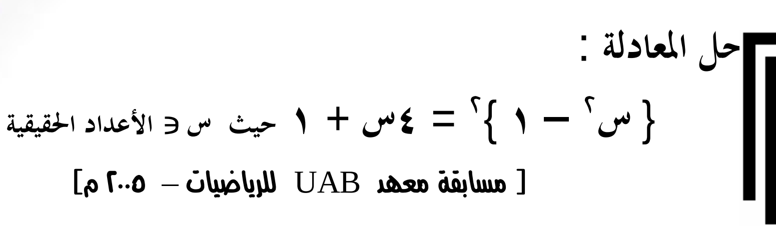
$$\frac{دص}{دس} = ٣ س^{٢}\text{جا}^{٢}\{٥ س\} \text{ جتا}\{٥ س\} \{٥\} + ٢ س \text{ جا}^{٣}\{٥ س\}$$

$$\frac{دص}{دس} = ١٥ س^{٢}\text{جا}^{٢}\{٥ س\} \text{ جتا}\{٥ س\} + ٢ س \text{ جا}^{٣}\{٥ س\}$$

$$\frac{دص}{دس} = س \text{ جا}^{٢}\{٥ س\} \Big\{ ١٥ س \text{ جتا}\{٥ س\} + ٢ \text{ جا}\{٥ س\} \Big\}$$







حل المعادلة :

$\{س^٢ - ١\}^٢ = ٤س + ١$ حيث س ∋ الأعداد الحقيقية

[مسابقة معهد UAB للرياضيات – ٢٠٠٥ م]



$\{س^٢ - ١\}^٢ = ٤س + ١$

$س^٤ - ٢ س^٢ + ١ = ٤س + ١$

$س^٤ - ٢ س^٢ - ٤س = ٠$

$س \{ س^٣ - ٢ س - ٤\} = ٠$

$س \left[\{س^٣ - ٨\} - ٢ س + ٤ \right] = ٠$

$س \left[\{س^٣ - ٨\} - ٢ \{س - ٢\} \right] = ٠$

$س \left[\{س - ٢\} \{س^٢ + ٢ س + ٤\} - ٢ \{س - ٢\} \right] = ٠$

$س \left[\{س - ٢\} \{س^٢ + ٢ س + ٤ - ٢\} \right] = ٠$

$س \{س - ٢\} \{س^٢ + ٢ س + ٤ - ٢\} = ٠$

∴ جذور المعادلة :-

س = ٠ ، س = ٢



٨١

على الشكل المجاور :

أ ب ج △ فيه س ص] ب ج ،

رسم س ج يقطع ص ب في م ،

رسم م ن] ب ج ويقطع أ ب في ن

إذا كان :

| ج ن | = ٢ سم ، | ن ص | = ١ سم

فأوجد : | أ ج |

[المصدر : مسابقة ولاية وسكنسون الأمريكية– التصفية الثانية – نوفمبر ٢٠٠٤م]



∵ ن م] ج ب

∴ △ ص ن م يشابه △ ص ج ب

∴ ص م / ص ب = ص ن / ص ج = ١/٣

، ص م / م ب = ص ن / ن ج = ١/٢

∵ س ص] ب ج

∴ △ م ص س يشابه △ م ب ج

∴ س ص / ب ج = ص م / م ب = ١/٢

وكذلك △ أ س ص يشابه △ أ ب ج

∴ أ ص / أ ج = س ص / ب ج = ١/٢

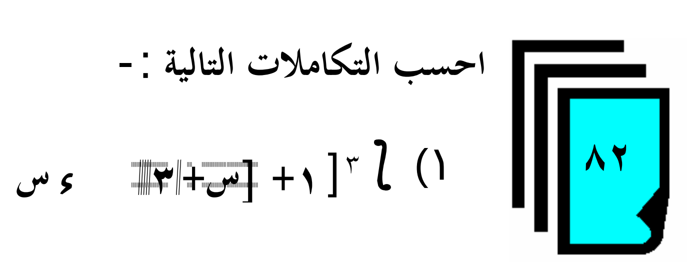
∴ أ ص / أ ج = ١/٢

∴ أ ج = ٢ أ ص ومنها ص منتصف أ ج

∴ أ ص = ص ج = ٣ سم

∴ | أ ج | = ٦ سم .





احسب التكاملات التالية :-

١) $\int \sqrt[3]{١ + \sqrt{س + ٣}}\ ءس$

٢) $\int \frac{١}{\sqrt{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}}}\ ءس$

[مسابقة معهد ECC للعلوم الرياضية –٩ ابريل ٢٠٠٥ م]



١) $\int \sqrt[3]{١ + \sqrt{س + ٣}}\ ءس$

نفرض أن : $ص^{٣} = ١ + \sqrt{س + ٣}$

∴ $ص = \sqrt[3]{١ + \sqrt{س + ٣}}$

، ∴ $ص^{٣} - ١ = \sqrt{س + ٣}$

∴ $س = \{ص^{٣} - ١\}^{٢} + ٣$

∴ $سَ = ٢ \{ص^{٣} - ١\}\{٣ص^{٢}\}\ ءص = \{٦ص^{٥} - ٦ص^{٢}\}\ ءص$

∴ $\int \sqrt[3]{١ + \sqrt{س + ٣}}\ ءس = \int \{ص\}\{٦ص^{٥} - ٦ص^{٢}\}\ ءص$

∴ $\int \{٦ص^{٦} - ٦ص^{٣}\}\ ءص = ٦\frac{ص^{٧}}{٧} - ٦\frac{ص^{٤}}{٤} + ث$

$= \frac{٦}{٧}\{\sqrt[3]{١ + \sqrt{س + ٣}}\}^{٧} - \frac{٣}{٢}\{\sqrt[3]{١ + \sqrt{س + ٣}}\}^{٤} + ث$

$= \frac{٦}{٧}\{١ + \sqrt{س + ٣}\}^{\frac{٧}{٣}} - \frac{٣}{٢}\{١ + \sqrt{س + ٣}\}^{\frac{٤}{٣}} + ث$

٢) $\int \frac{١}{\sqrt{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}}}$ ءس

نفرض أن : $ص^٢ = ٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}$

∴ $ص = \sqrt{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}}$

، ∴ $ص^٢ - ٢ = \sqrt{١ + \sqrt{س}}$

بالتربيع ∴ $\{ص^٢ - ٢\}^٢ = ١ + \sqrt{س}$ ∴ $\sqrt{س} = \{ص^٢ - ٢\}^٢ - ١$

بالتربيع ∴ $س = \{\{ص^٢ - ٢\}^٢ - ١\}^٢$

∴ $سَ = ٢\{\{ص^٢ - ٢\}^٢ - ١\} \times ٢\{ص^٢ - ٢\}\{٢ص\}$ ءص

$= ٨ص\{ص^٢ - ٢\}\{ص^٤ - ٤ص^٢ + ٣\}$ ءص

$= \{٨ص^٧ - ٤٨ص^٥ + ٨٨ص^٣ - ٤٨ص\}$ ءص

∴ $\int \frac{١}{\sqrt{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}}}$ ءس $= \int \frac{١}{ص}\{٨ص^٧ - ٤٨ص^٥ + ٨٨ص^٣ - ٤٨ص\}$ ءص

$= \int \{٨ص^٦ - ٤٨ص^٤ + ٨٨ص^٢ - ٤٨\}$ ءص

$= ٨\frac{ص^٧}{٧} - ٤٨\frac{ص^٥}{٥} + ٨٨\frac{ص^٣}{٣} - ٤٨ص + ث$

$= \frac{٨}{٧}\{\sqrt{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}}\}^٧ - \frac{٤٨}{٥}\{\sqrt{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}}\}^٥ + \frac{٨٨}{٣}\{\sqrt{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}}\}^٣$

$- ٤٨\{\sqrt{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}}\} + ث$

$= \frac{٨}{٧}\{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}\}^{٧/٢} - \frac{٤٨}{٥}\{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}\}^{٥/٢} + \frac{٨٨}{٣}\{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}\}^{٣/٢}$

$- ٤٨\{٢ + \sqrt{١ + \sqrt{س}}\}^{١/٢} + ث$

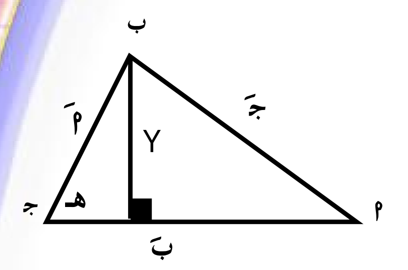


دليل معلم الرياضيات

الجزء الأول



مثلث ارتفاعه Y وقاعدته ب



المساحة = $\frac{1}{2}$ بَ ع

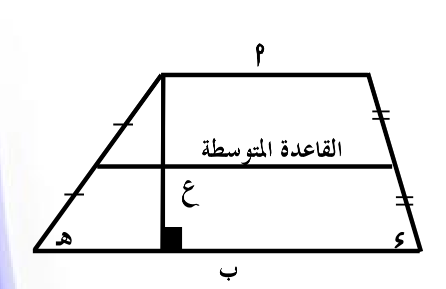
= مَ بَ جا هـ

= $\sqrt{H (H - مَ)(H - بَ)(H - جَ)}$

حيث H = $\frac{1}{2}$ (مَ + بَ + جَ)

المحيط = مَ + بَ + جَ

شبه منحرف ارتفاعه Y وطولي قاعدته A ، ب



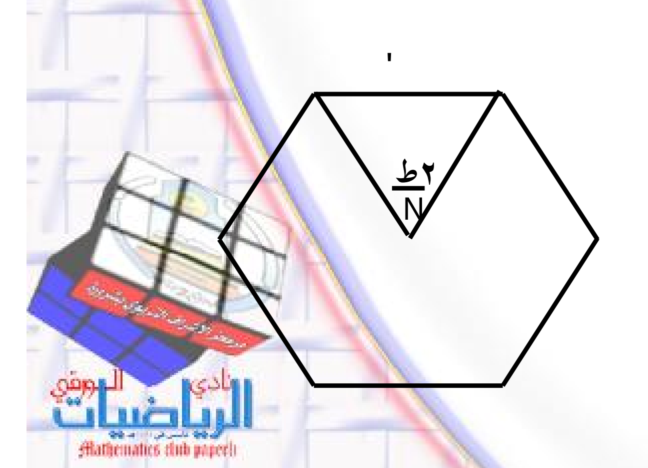
المساحة = $\frac{1}{2}$ ع { م + ب }

= ع × القاعدة المتوسطة

المحيط = م + ب + ع ($\frac{1}{جاهـ}$ + $\frac{1}{جاء}$)

= م + ب + ع (قتا هـ + قتا ء)

مضلع منتظم عدد أضلاعه N ، وطول كل منها '

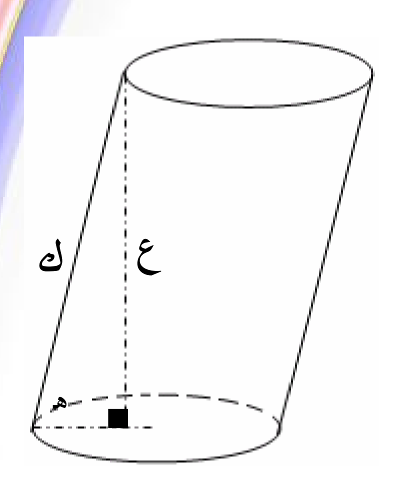


المساحة = $\frac{1}{4}$ N '٢ ظتا $\frac{ط}{N}$

= $\frac{1}{4}$ N '٢ $\frac{جتا \frac{ط}{N}}{جا \frac{ط}{N}}$

المحيط = N '

اسطوانة دائرية مائلة نصف قطرها نق وارتفاعها ع وطول راسمها ك



الحجم = ط نق^2 ع

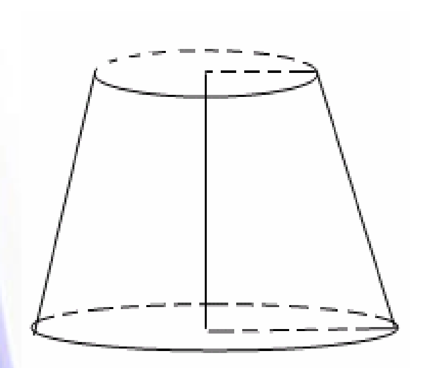
= ط نق^2 ك جا هـ

المساحة الجانبية = ٢ ط نق ك

$= \dfrac{\text{٢ ط نق ع}}{\text{جا هـ}}$

= ٢ ط نق ع قتا هـ

مخروط دائري قائم ناقص قطري قاعدتيه أ، ب وارتفاعه ع

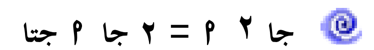


الحجم = $\frac{1}{3}$ ط ع (أ^2 + أ ب + ب^2)

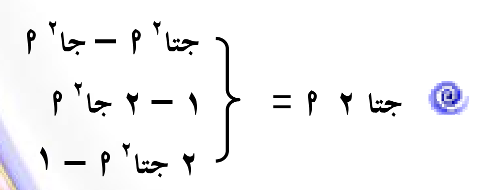
المساحة الجانبية = ط (أ + ب) [ع^2 + (ب - أ)^2]$^{\frac{1}{2}}$

= ط (أ + ب) ك

النسب المثلثية لضعف ومضاعفات الزاوية



- جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ
- جا ٣ أ = ٣ جا أ - ٤جا^3 أ
- جتا٣ أ = ٤ جتا^3 أ − ٣جتا أ
- ظا ٢ أ = $\dfrac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ − ظا}^2\text{ أ}}$



- جتا ٢ أ = { جتا^2 أ − جا^2 أ ، ١ − ٢ جا^2 أ ، ٢ جتا^2 أ − ١ }
- ظا ٣ أ = $\dfrac{\text{٣ظا أ - ظا}^3\text{ أ}}{\text{١ − ٣ظا}^2\text{ أ}}$



مساحة مثلث إحداثيات رؤوسه (س١، ص١)، (س٢، ص٢)، (س٣، ص٣).

$$\text{المساحة} = \pm \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ س_١ & س_٢ & س_٣ \\ ص_١ & ص_٢ & ص_٣ \end{vmatrix} = \pm \frac{١}{٢} (س_١ ص_٢ + ص_١ س_٣ + ص_٣ س_٢ - ص_٢ س_٣ - ص_١ س_٢ - س_١ ص_٣).$$

مساحة المثلث دائماً موجبة.

إذا كانت المساحة = صفراً فإن النقط الثلاثة تكون على استقامة واحدة

العلاقة بين أضلاع المثلث وزواياه

ﻫ ب ج مثلث أطوال أضلاعه ﻫَ ، بَ ، جَ وزواياه ﻫ، ب ، ج

قاعدة الجيب : $\frac{ﻫَ}{جا\ ﻫ} = \frac{بَ}{جا\ ب} = \frac{جَ}{جا\ ج}$

قاعدة ظل نصف الزاوية : $ظا \frac{١}{٢} (ﻫ - ب) = \frac{ﻫَ - بَ}{ﻫَ + بَ} \times ظا \frac{١}{٢} (ﻫ - ب).$

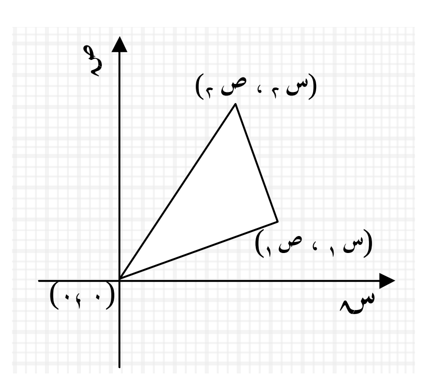
قاعدة جيب التمام : $جتا\ ﻫ = \frac{بَ^٢ + جَ^٢ - ﻫَ^٢}{٢\ بَ\ جَ}$

$جتا\ ب = \frac{ﻫَ^٢ + جَ^٢ - بَ^٢}{٢\ ﻫَ\ جَ}$

$جتا\ ج = \frac{ﻫَ^٢ + بَ^٢ - جَ^٢}{٢\ بَ\ جَ}$



مساحة المثلث الذي أحد رؤوسه (٠ ، ٠)



$$\text{المساحة} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} س_1 & س_2 \\ ص_1 & ص_2 \end{vmatrix}$$

الزاوية هـ بين المستقيمين اللذين ميلاهما م١ ، م٢

$$\text{ظا هـ} = \frac{م_2 - م_1}{1 + م_1 م_2}$$

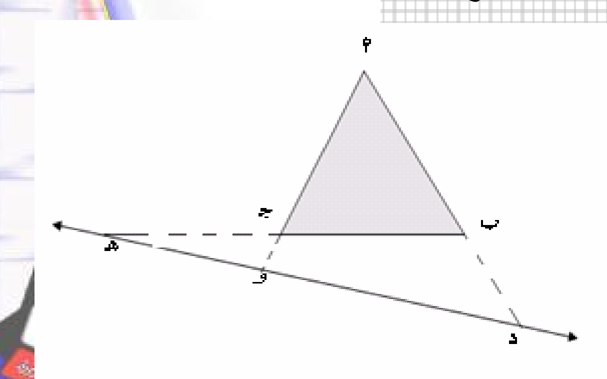
المستقيمان متوازيان إذا وفقط إذا كان : $م_1 = م_2$

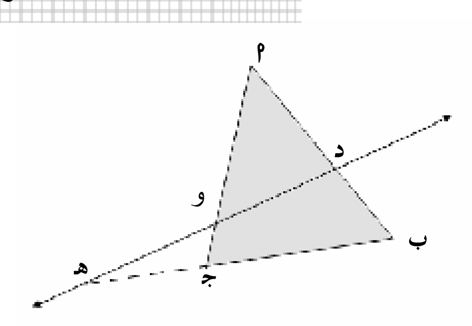
المستقيمان متعامدان إذا وفقط إذا كان : $م_2 = - \frac{1}{م_1}$

نظرية منيلوس

إذا قطع مستقيم المستقيمات الثلاثة الحاملة لأضلاع مثلث فإنه يقسم كل ضلع من أضلاع المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزأين ، ويكون حاصل ضرب ثلاثة أجزاء منها غير متتالية ، ومأخوذة في ترتيب دوري واحد يساوي حاصل ضرب أطوال الأجزاء الثلاثة الأخرى

$$أد \times ب هـ \times جـ و = د ب \times هـ جـ \times و أ$$



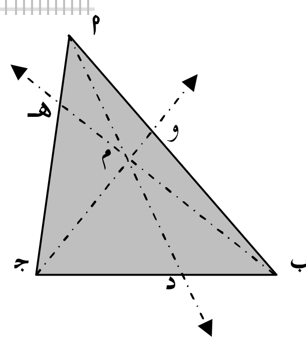


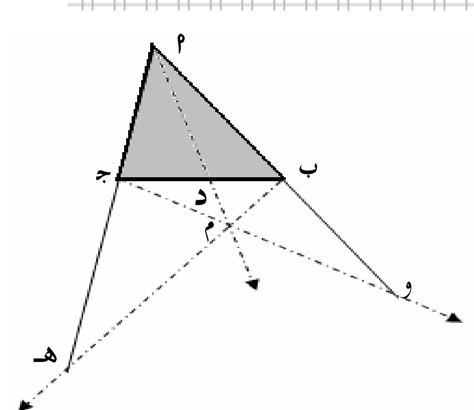


نظرية شيفا

إذا رسمت من رؤوس أي مثلث إلى أضلاعه المقابلة ثلاثة أشعة متقاطعة في نقطة واحدة بحيث تقسم كل ضلع من أضلاع المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزأين فإن حاصل ضرب أطوال ثلاثة أجزاء غير متتالية ومأخوذة في ترتيب دوري واحد يساوي حاصل ضرب أطوال الأجزاء الثلاثة الأخرى .

ب د × ج هـ × أو = د ج × هـ أ × و ب





القانون لحل المعادلة التربيعية في مجهول واحد

القانون العام لحل المعادلة : أ $س^2$ + ب س + ج = صفر

هو : $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أ ج}}{٢أ}$

حيث : أ معامل $س^2$ ، ب معامل س ، ج الحد الخالي من س ويسمى المقدار : $ب^2$ - ٤أ ج مميز المعادلة

وإذا كان : $ب^2$ - ٤أ ج > ٠ فإن للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان

وإذا كان : $ب^2$ - ٤أ ج < ٠ فإن للمعادلة حلان حقيقيان متساويان

وإذا كان : $ب^2$ - ٤أ ج =٠ فإن للمعادلة ليس لها أي حلول حقيقية (لها حلان تخيليان)

اللوغاريتمات

لوغاريتم العدد لأي أساس هو عدد مرات تكرار هذا الأساس عن طريق الضرب

$$م^{ب} \Longleftrightarrow لو_م ٩ = ب$$

قوانين اللوغاريتمات

- $لو_م ٩ ب = لو_م ٩ + لو_م ب$
- $لو_م \frac{٩}{ب} = لو_م ٩ - لو_م ب$
- $لو_م ٩^{ب} = ب لو_م ٩$
- $لو_م م = ١$
- $لو_م ١ = ٠$
- $لو_م \sqrt[ن]{٩} = \frac{١}{ن} لو_م ٩$

التفاضل (الجزء الأول)

أولا: تعريف التفاضل

إذا كانت ص = د(س) فإن مشتقة ص بالنسبة إلى س أي $\frac{ءص}{ءس}$ تعرف كالتالي :

$$\frac{ءص}{ءس} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{ء(س + هـ) - ء(س)}{هـ} = \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{ء(س + \Delta س) - ء(س)}{\Delta س}$$

حيث و = Δ س ويرمز أيضاً للمشتقة الأولى أيضا بالرمز $صَ$



التفاضل (الجزء الثاني)

فيما يلي لاحظ أن : ل ، ص ، ع عبارة عن دوال ؛ ٢، ب ، جـ ، ٮ ثوابت.

- $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جـ}) = \text{صفر}$
- $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جـ س}) = \text{جـ}$
- $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جـ س}^{\text{ٮ}}) = \text{ٮ جـ س}^{\text{ٮ}-1}$
- $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ل} - \text{ص} - \text{ع} - .....) = \frac{\text{ءل}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} - ....$
- $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جـ ل}) = \frac{\text{ءل}}{\text{ءس}}$

التفاضل (الجزء الثالث)

فيما يلي لاحظ أن : ل ، ص ، ع عبارة عن دوال ؛ ٢، ب ، جـ ، ٮ ثوابت.

- $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(\text{ل ص}) = \text{ل}\frac{\text{ءل}}{\text{ءس}} + \text{ص}$
- $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ل}}{\text{ع}}\right) = \left[\text{ع}\frac{\text{ءل}}{\text{ءس}} - \text{ل}\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}\right] \div \text{ع}^2$ حيث $\text{ع} \neq \text{صفر}$
- $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(\text{ل}^{\text{ٮ}}) = \text{ٮ ل}^{\text{ٮ}-1} \; \frac{\text{ءل}}{\text{ءس}}$
- $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءل}} \times \frac{\text{ءل}}{\text{ءس}}$
- $\frac{\text{ءل}}{\text{ءس}} = 1 \div \left[\frac{\text{ءس}}{\text{ءل}}\right]$

التفاضل (الجزء الرابع)

فيما يلي لاحظ أن : ل ، ص ، ع عبارة عن دوال ؛ أ، ب ، جـ ، ن ثوابت.

- $\frac{ء}{ءس}$ (جا ي) = جتا ي $\frac{ءي}{ءس}$
- $\frac{ء}{ءس}$ (جتا ي) = - جا ي $\frac{ءي}{ءس}$
- $\frac{ء}{ءس}$ (ظا ي) = قا^{٢}ي $\frac{ءي}{ءس}$
- $\frac{ء}{ءس}$ (ظتا ي) =- قتا^{٢}ي $\frac{ءي}{ءس}$
- $\frac{ء}{ءس}$ (قاي) = قاي ظا ي $\frac{ءي}{ءس}$
- $\frac{ء}{ءس}$ (قتا ي) = - قتا ي ظتا ي $\frac{ءي}{ءس}$

التفاضل (الجزء الخامس)

تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية:

- $\frac{ء}{ءس}$ $e^{س}$ = $e^{س}$ ، $\frac{ء}{ءس}$ $e^{و(س)}$ = $e^{و(س)}$. و$'$(س)
- $\frac{ء}{ءس}$ لو$_{هـ}$ س = $\frac{١}{س}$ ، لو$_{هـ}$ و (س) = $\frac{١}{و(س)}$ و$'$(س)
- لو س = لو$_{هـ}$ س . لو هـ
- $\frac{ء}{ءس}$ أ^{س} = أ^{س}. لو$_{هـ}$ أ ، $\frac{ء}{ءس}$ أ$^{و(س)}$ = أ$^{و(س)}$. و$'$(س) لو أ

قواعد عامة في التكامل (الجزء الأول)

فيما يلي لاحظ أن : ل ، ص ، ع عبارة عن دوال ؛ أ، ب ، ج ، م ، ن ثوابت.

- $\int$ أ ءس = أ س + ث
- $\int$ أ {ءس} ءس = ء{س} ءس
- $\int$ (ل _ ص _ ع _ .....} ءس = $\int$ ل ءس _ $\int$ ص ءس _ $\int$ ع ءس _ ....
- $\int$ ل ء ص = ل ص – $\int$ ص ء ل (التكامل بالتجزيء)
- $\int$ ء{أ س} ءس = $\frac{1}{أ}$ $\int$ ء{ل} ء ل.
- $\int$ $ل^{ن}$ ء ل = $\frac{ل^{ن+1}}{ن+1}$ + ث (ن ≠ -١}

قواعد عامة في التكامل (الجزء الثاني)

فيما يلي لاحظ أن : ل ، ص ، ع عبارة عن دوال ؛ أ، ب ، ج ، م ، ن ثوابت ∈ ح

- $\int$ جا س ء س = - جتا س + ث.
- $\int$ جتا س ء س = جا س + ث.
- $\int$ ظا س ء س = لو قا س = - لوجتا س + ث.
- $\int$ ظتا س ء س = لو جا س + ث.
- $\int$ $قا^{2}$ س ء س = ظا س + ث.
- $\int$ $قتا^{2}$ل ء س = - ظتا س + ث.
- $\int$ جتا ن س ء س = جا ن س + ث.
- $\int$ جا ن س ء س = جتا ن س + ث.
- $\int$ قا س ظا س ء س = قا س + ث.
- $\int$ قا ن س ظا ن س ء س = - ن قا س + ث.
- $\int$ قتا ن س ظتا ن س ء س = - ن قتا س + ث.

هندسة تحليلية (الجزء الأول)

- المسافة بين نقطتين $\text{أ}\{س_١، ص_١\}$ ، $\text{ب}\{س_٢، ص_٢\}$

$$ل = \sqrt{\{س_٢ - س_١\}^٢ + \{ص_٢ - ص_١\}^٢}$$

- ميل الخط المستقيم إذا علمت نقطتين $\{س_١، ص_١\}$ ، $\{س_٢، ص_٢\}$ عليه:

$$م = \qquad = ظا\ هـ$$

- معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه $\text{أ}\{س_١، ص_١\}$ ، $\text{ب}\{س_٢، ص_٢\}$

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

هندسة تحليلية (الجزء الثاني)

١) معادلة المستقيم بمعلومية الميل م و نقطة عليه $\{س_١، ص_١\}$.

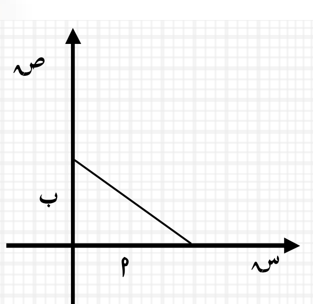
$$ص - ص_١ = م\{س - س_١\} .$$

٢) معادلة الخط المستقيم بمعلومية الجزء المقطوع من محور الصادات.

$ص = م\,س + جـ$ (حيث الجزء المقطوع من محور الصادات ، م الميل)

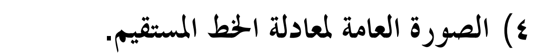
٣) معادلة الخط المستقيم بمعلومية الجزأين المقطوعين من محور ي الإحداثيات.

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١ \quad (\text{حيث } أ \neq ٠ ،\ ب \neq ٠)$$



نتائج:

- معادلة محور السينات : $ص = ٠$
- معادلة محور الصادات: $س = ٠$
- معادلة مستقيم يوازي محور السينات وعلى بعد منه يساوي ك هي : $ص = ك$.
- معادلة مستقيم يوازي محور الصادات وعلى بعد منه يساوي ك هي : $س = ك$



٤) الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

$أ\,س + ب\,ص + جـ = ٠$ (حيث أ ، ب ، جـ ∋ مجموعة الأعداد الحقيقية).



هندسة تحليلية (الجزء الثالث)

١) طول العمود الساقط (ل) من النقطة {س١، ص١} على المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

$$ل = \frac{أ س_1 + ب ص_1 + جـ}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

٢) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق : $س^2 + ص^2 = نق^2$

٣) معادلة الدائرة التي مركزها أي نقطة (ل ، ك) ونصف قطرها نق : $\{س - ل\}^2 + \{ص - ك\}^2 = نق^2$

٤) معادلة الدائرة التي نهايتا أحد أقطارها {س١، ص١} ، {س٢، ص٢}

$$= \{س - س_1\}\{س - س_2\} + \{ص - ص_1\}\{ص - ص_2\} = ٠$$

٥) معادلة الدائرة التي نصف قطرها نق و مركزها (ل ، ك) و تمر بنقطة الأصل =

$$س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص = ٠$$

٦) صورة المعادلة العامة للدائرة : $س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠$

أو: $\{س - ل\}^2 + \{ص - ك\}^2 = \{ل^2 + ك^2 - جـ\}$

ومركز هذه الدائرة في الصورة العامة (- ل ، - ك) ، و نصف قطرها = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$

وهي : معادلة من الدرجة الثانية في كل من س ، ص

، معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ ، معامل س ص

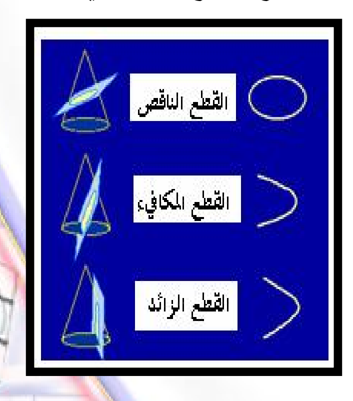
هندسة تحليلية (الجزء الرابع)

القطوع المخروطية (الناقص ، المكافيء ، الزائد)

إذا تحركت نقطة في مستوى بحيث كانت النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة إلى بعدها عن مستقيم ثابت في المستوى مقداراً ثابتاً ، فإنها ترسم منحنى يسمى قطعاً مخروطياً.

وتسمى النقطة الثابتة بؤرة القطع (focus) ، ويسمى المستقيم الثابت دليل القطع (Directrix) وتسمى النسبة الثابتة الاختلاف المركزي للقطع (Eccentricity) ويرمز له عادة بالرمز هـ ، وعلى قيمة هـ يتحدد نوع القطع المخروطي:





١) إذا كانت: هـ = ١ يسمى القطع المخروطي قطعاً مكافئاً.

٢) إذا كانت: هـ < ١ يسمى القطع المخروطي قطعاً ناقصاً.

٣) إذا كانت: هـ > ١ يسمى القطع المخروطي قطعاً زائداً.

ولقد سميت هذه المنحنيات قطوعاً مخروطية ، لأنها تنتج أيضاً من مقاطع المخروط الدائري القائم بمستويات معينة . وشكل القطع الناتج من تقاطع مستو مع مخروط دائري قائم يتوقف على زاوية ميل المستوي على محور المخروط أوجد النسبة بين مساحة الدائرة ومساحة المثلث.



قواعد عامة في التكامل (الجزء الثاني)

ه °	ه دائري	جا ه	جتا ه	ظا ه	ظا ه	قتا ه	قتا ه
٠°	٠	٠	١	٠	غير معرفة	١	غير معرفة
١٥°	$\frac{ط}{١٢}$	$\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}\}$	$\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}\}$	$٢-\sqrt{٣}$	$٢+\sqrt{٣}$	$\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$	$\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$
٣٠°	$\frac{ط}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	$\sqrt{٣}$		٢
٤٥°	$\frac{ط}{٤}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١	١	$\sqrt{٢}$	$\sqrt{٢}$
٦٠°	$\frac{ط}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	٢	
٧٥°	$\frac{٥ط}{١٢}$	$\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}\}$	$\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}\}$	$٢+\sqrt{٣}$	$٢-\sqrt{٣}$	$\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$	$\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$
٩٠°	$\frac{ط}{٢}$	١	٠	∞ _	٠	∞ _	١
١٠٥°	$\frac{٧ط}{١٢}$	$\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}\}$	$-\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}\}$	$-٢-\sqrt{٣}$	$-٢+\sqrt{٣}$	$-\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$	$\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$
١٢٠°	$\frac{٢ط}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	$-\sqrt{٣}$	$-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	-٢	
١٣٥°	$\frac{٣ط}{٤}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\sqrt{٣}$	-١	-١	$-\sqrt{٢}$	$\sqrt{٢}$
١٥٠°	$\frac{٥ط}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	$-\sqrt{٣}$		٢
١٦٥°	$\frac{١١ط}{١٢}$	$\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}\}$	$-\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}\}$	$-٢+\sqrt{٣}$	$-٢-\sqrt{٣}$	$-\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$	$\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$
١٨٠°	ط	٠	-١	٠	∞ _	-١	∞ _
١٩٥°	$\frac{١٣ط}{١٢}$	$-\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}\}$	$-\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}\}$	$٢-\sqrt{٣}$	$٢+\sqrt{٣}$	$-\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$	$-\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$
٢١٠°	$\frac{٧ط}{٦}$	$-\frac{١}{٢}$	$-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	$\sqrt{٣}$		-٢
٢٢٥°	$\frac{٥ط}{٤}$	$-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١	١	$-\sqrt{٢}$	$-\sqrt{٢}$
٢٤٠°	$\frac{٤ط}{٣}$	$-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	-٢	
٢٥٥°	$\frac{١٧ط}{١٢}$	$-\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}\}$	$-\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}\}$	$٢+\sqrt{٣}$	$٢-\sqrt{٣}$	$-\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$	$-\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$
٢٧٠°	$\frac{٣ط}{٢}$	-١	٠	∞ _	٠	∞ _	-١
٢٨٥°	$\frac{١٩ط}{١٢}$	$-\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}\}$	$\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}\}$	$-٢-\sqrt{٣}$	$-٢+\sqrt{٣}$	$\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$	$-\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$
٣٠٠°	$\frac{٥ط}{٣}$	$-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$-\sqrt{٣}$	$-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	٢	
٣١٥°	$\frac{٧ط}{٤}$	$-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	-١	-١	$\sqrt{٢}$	$-\sqrt{٢}$
٣٣٠°	$\frac{١١ط}{٦}$	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	$-\sqrt{٣}$		-٢
٣٤٥°	$\frac{٢٣ط}{١٢}$	$-\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}\}$	$\frac{١}{٤}\{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}\}$	$-٢+\sqrt{٣}$	$-٢-\sqrt{٣}$	$\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$	$-\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$
٣٦٠°	٢ط	٠	١	٠	∞ _	١	∞ _

